CÁLCULO V
SÉRIES NUMÉRICAS

Grey Ercole

CÁLCULO V
SÉRIES NUMÉRICAS

Belo Horizonte
Editora UFMG
2010

A Educação a Distância (EAD) é uma modalidade de ensino que busca promover inserção social pela disseminação de meios e processos de democratização do conhecimento. A meta é elevar os índices de escolaridade e oferecer uma educação de qualidade, disponibilizando uma formação inicial e/ou continuada, em particular, a professores que não tiveram acesso a esse ensino.

Não se pode ignorar que é fundamental haver, sempre, plena conexão entre educação e aprendizagem. A modalidade a distância é um tipo de aprendizagem que, em especial na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), já está concretizada como um ensino de qualidade. Hoje, a aprendizagem tornou-se, para todos os profissionais dessa universidade envolvidos no programa de Educação a Distância, sinônimo de esforço e dedicação de cada um.

Este livro visa desenvolver no curso a distância os mesmos conhecimentos proporcionados num curso presencial. Os alunos estudarão o material nele contido e muitos outros, que lhe serão sugeridos em bibliografia complementar. É importante terem em vista que essas leituras são de extrema importância para, com muita dedicação, avançarem em seus estudos.

Cada volume da coletânea está dividido em aulas e, em cada uma delas, trata-se de determinado tema, que é explorado de diferentes formas – textos, apresentações, reflexões e indagações teóricas, experimentações ou orientações para atividades a serem realizadas pelos alunos. Os objetivos propostos em cada uma das aulas indicam as competências e habilidades que os alunos, ao final da disciplina, devem ter adquirido.

Os exercícios indicados ao final de cada aula possibilitam aos alunos avaliarem sua aprendizagem e seu progresso em cada passo do curso. Espera-se que, assim, eles se tornem autônomos, responsáveis, críticos e decisivos, capazes, sobretudo, de desenvolver a própria capacidade intelectual. Os alunos não podem se esquecer de que toda a equipe de professores e tutores responsáveis pelo curso estará, a distância ou presente nos polos, pronta a ajudá-los. Além disso, o estudo em grupo, a discussão e a troca de conhecimentos com os colegas serão, nessa modalidade de ensino, de grande importância ao longo do curso.

Agradeço aos autores e à equipe de produção pela competência, pelo empenho e pelo tempo dedicado à preparação deste e dos demais livros dos cursos de EAD. Espero que cada um deles possa ser valioso para os alunos, pois tenho certeza de que vão contribuir muito para o sucesso profissional de todos eles, em seus respectivos cursos, na área da educação em geral do país.

Ione Maria Ferreira de Oliveira
Coordenadora do Sistema Universidade Aberta do Brasil
(UAB/UFMG)

Sumário

Apresentação

Este texto foi desenvolvido especialmente para a disciplina Cálculo V do curso de Licenciatura em Matemática da UFMG, modalidade a distância.

Ele foi idealizado para proporcionar acesso direto aos conteúdos do curso, mas sem dispensar os livros didáticos convencionais.

Assim, este material procura ser direto e objetivo e, ao mesmo tempo, ilustrativo, explicativo e convidativo. Notas de rodapé e expressões como "isto é", "ou seja", "isto significa" são, talvez, exageradamente utilizadas no texto. Mas procuram elucidar, na fonte, dúvidas que poderiam surgir durante a apresentação ou o tratamento de conceitos e técnicas, tentando simular aquele pequeno espaço no quadro-negro que o professor sempre consegue encontrar para esmiuçar uma explicação.

A ideia que o acompanha é a de que suas páginas devem retratar peculiaridades dos temas em estudo que o professor, de acordo com suas percepções, escolheria tratar em uma sala de aula.

Nessa linha, e seguindo um roteiro padrão, conceitos são apresentados - por vezes despidos de um formalismo técnico – e ilustrados ou descritos por meio de vários exemplos e exercícios estrategicamente espalhados ao longo do texto. Além disso, aspectos centrais, teóricos e/ou práticos são imediatamente abordados, na expectativa de que o aluno identifique, durante suas consultas aos materiais bibliográficos, assuntos, técnicas e construções que precisa investigar com mais cuidado, a fim de construir um entendimento próprio que o leve a percorrer toda a disciplina em segurança e com sucesso.

Sugere-se, portanto, que o aluno procure estudar, alternadamente, este texto e um livro didático convencional, mantendo o foco no roteiro desenhado no primeiro. Nesse processo, as dúvidas geradas por eventuais conflitos e mesmo a formulação de críticas próprias a um ou outro material devem contribuir, certamente, para o bom aproveitamento do curso, na medida em que alimentam o relacionamento (presencial e a distância) entre as partes: aluno, tutores e professor.

Como ocorre em uma sala de aula, não há muito espaço, neste texto, para a proposição e resolução de exercícios que explorem técnicas mais elaboradas do que aquelas já usuais. Estas, por sua vez, são apresentadas com bastante cuidado no texto.

Por outro lado, os livros didáticos convencionais oferecem quantidade substancial de exercícios, separados por tópicos. Cabe, portanto, ao aluno buscar resolvê-los, recorrendo sempre a orientações de seus tutores e de seu professor, a fim de se manter em sintonia com o curso.

AULA 1

Sequências numéricas e limites

OBJETIVOS
- Desenvolver o conceito de sequência numérica.
- Apresentar as propriedades de monotonicidade e limitação.
- Apresentar operações simples envolvendo sequências numéricas.
- Apresentar os conceitos: sequência convergente, limite e limite infinito.
- Verificar que as sequências convergentes são limitadas.
- Operar com limites.
- Apresentar a regra do sanduíche (ou do confronto).
- Apresentar teoremas de convergência para sequências monótonas e limitadas.

1.1 Sequências numéricas

Uma sequência numérica - ou simplesmente sequência - é uma lista **infinita** e **ordenada** de números reais

$$a_1, a_2, a_3, \cdots .$$

Utilizaremos a **notação** (a_n) para denotar, genericamente, uma tal sequência. Note que para (a_n) ser caracterizada como uma sequência é necessário que a lista de números que ela representa tenha infinitos elementos, os quais chamaremos de **termos**, e seja ordenada, isto é, a_1 deve indicar o primeiro termo ou termo de ordem 1 da sequência, a_2 deve indicar o segundo termo ou termo de ordem 2 da sequência, a_3 deve indicar o terceiro termo ou termo de ordem 3 da sequência e assim por diante, de modo que a_n deve indicar o n-ésimo termo ou **termo de ordem** n ou, ainda, o **termo geral** da sequência (a_n).

Essas características permitem que vejamos uma sequência (a_n) como uma função $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R}$, em que $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$ é o conjunto dos números inteiros positivos. Assim, $a_n = f(n)$.

O exemplo mais simples de sequência é a **sequência constante** em que todos os seus termos são iguais a uma constante k :

$$k, k, k, k, \cdots .$$

Nesse caso, $a_n = k$ para todo n e a função f que define a sequência (a_n) é a função constante $f(n) = k$.

Exemplo 1.1 A sequência

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$$

pode ser escrita assim: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. Nesse caso, $f(n) = \dfrac{n}{n+1}$. □

Exemplo 1.2 A sequência

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots$$

pode ser escrita na forma $b_n = (-1)^n$ ou, alternativamente, na forma $b_n = \cos((n-1)\pi)$. Neste exemplo exibimos duas expressões diferentes para a mesma função que descreve a sequência. □

Exercício 1.1 Encontre uma expressão para o termo geral da sequência (a_n) cujos 5 primeiros termos são

$$a_1 = \frac{1}{2}, \; a_2 = -\frac{1}{4}, \; a_3 = \frac{1}{8}, \; a_4 = -\frac{1}{16} \text{ e } a_5 = \frac{1}{32}.$$

□

Em várias situações, entretanto, não conseguimos exibir uma expressão para o termo geral de uma sequência ou para a função que a determina. Isto ocorre frequentemente com **sequências recursivas** (ou recorrentes). Estas são definidas por um processo recursivo no qual exibimos uma quantidade finita de termos e, a partir deles, utilizando um critério ou uma regra (a função f), encontramos os termos restantes.

Exemplo 1.3 Um exemplo de sequência recursiva é a sequência de Fibonacci (f_n)

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots \tag{1.1}$$

Ela pode ser definida, recursivamente, da seguinte forma. Inicialmente, determinamos que $f_1 = 1$ e que $f_2 = 1$. Daí, escrevemos os outros termos de modo que obedeçam à seguinte regra: cada termo deve ser a soma dos dois termos imediatamente anteriores. Assim, encontramos

$$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2, \quad f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$$
$$f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5, \quad f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8$$

e assim por diante, de modo que podemos escrever

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ para } n \geq 3. \end{cases}$$

□

Exemplo 1.4 Outro exemplo é a sequência (b_n) definida por

$$b_n = 1 + 2 + \cdots + n \tag{1.2}$$

(o n-ésimo termo da sequência é a soma dos n primeiros números inteiros positivos). Os quatro primeiros termos desta sequência são

$$b_1 = 1,\ \ b_2 = 1 + 2 = 3,\ \ b_3 = 1 + 2 + 3 = 6\ \text{ e } b_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Esta sequência é formada recursivamente, pois $b_n = b_{n-1} + n$, uma vez que

$$b_n = \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)}_{b_{n-1}} + \ n.$$

□

Mesmo notando que a sequência deste exemplo é recursiva, podemos ter − em princípio − dificuldades para calcular termos de ordem alta (isto é, com n grande). Por exemplo, para calcular o termo b_{100} teríamos que calcular a soma dos noventa e nove termos anteriores e somar 100 ao resultado!

Felizmente, para este exemplo e para alguns outros, conseguimos encontrar uma expressão direta para a função $f(n)$. De fato, no Ensino Médio você provavelmente viu que a expressão $b_n = \frac{n(n+1)}{2}$ fornece a soma dos n primeiros números inteiros positivos. Seria um bom exercício tentar redescobrir como se chega a esta fórmula. O fato é que por ela obtemos diretamente $b_{100} = \frac{100\times 101}{2} = 5050$.

Podemos representar geometricamente uma sequência (a_n) marcando seus termos na reta numérica, como na figura a seguir.
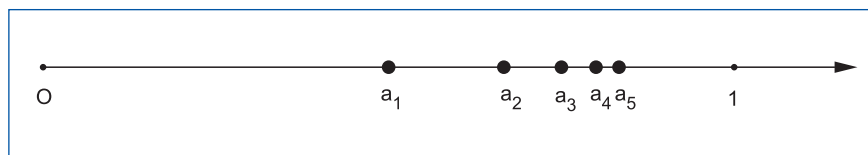
Figura 1.1 - Representação geométrica dos cinco primeiros termos da sequência $a_n = \frac{n}{n+1}$

1.1.1 Sequências monótonas

Dizemos que uma sequência (a_n) é **crescente** se

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots .$$

Ou seja, se cada termo da sequência é maior do que o termo anterior. Na representação geométrica isto significa que os termos da sequência são marcados na reta progressivamente para a direita, isto é, a_{n+1} está à direita de a_n para cada valor de n.

Exemplo 1.5 A sequência (a_n) representada na Figura 1.1 é um exemplo de sequência crescente, pois sempre temos $a_{n+1} > a_n$, uma vez que

$$\frac{n+1}{n+2} > \frac{n}{n+1} \text{ se, e somente se, } (n+1)^2 > n(n+2),$$

já que $n+1$ e $n+2$ são sempre positivos. Desenvolvendo esta última desigualdade encontramos a desigualdade equivalente

$$n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$$

que é válida para todo número inteiro n (o lado esquerdo da desigualdade é sempre uma unidade maior do que o lado direito). □

De maneira análoga, dizemos que uma sequência (b_n) é **decrescente** se

$$\cdots b_{n+1} < b_n < \cdots < b_3 < b_2 < b_1.$$

Isso significa que os termos da sequência vão diminuíndo à medida que suas ordens vão aumentando, ou seja, cada termo da sequência é menor do que o anterior e na representação geométrica o termo b_{n+1} fica sempre à esquerda do termo b_n.

Utilizamos a palavra **monótona** para indicar uma sequência que é ou crescente ou decrescente. Claramente, nem todas as sequências são monótonas, conforme mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 1.6 A sequência $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ não é monótona, pois não é crescente e nem decrescente. Seus termos oscilam em torno do número zero (sem atingí-lo).

$$c_1 = -1, \ c_2 = \frac{1}{2}, \ c_3 = -\frac{1}{3}, \ c_4 = \frac{1}{4}, \ c_5 = -\frac{1}{5}, \text{ etc.}$$

Uns ficam à esquerda de zero (negativos) e outros à direita (positivos), conforme podemos verificar na Figura 1.2, abaixo. □
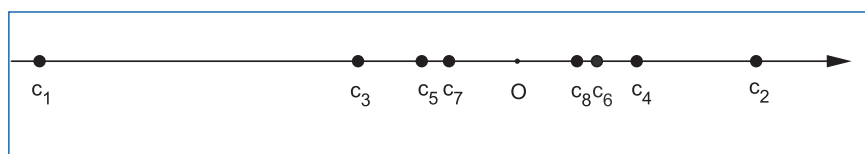
Figura 1.2 - Os sete primeiros termos de uma sequência que não é monótona: $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

1.1.2 Sequências limitadas

Dizemos que uma sequência (a_n) é **limitada superiormente** quando todos os seus termos são menores do que algum valor constante B denominado **cota superior** para a sequência (a_n). Ou seja, quando

$$a_n \leq B \ \text{ para todo } n.$$

Em uma representação geométrica, isso significa que todos os termos da sequência (a_n) ficam à esquerda da cota superior B. A cota superior funciona como uma barreira à direita para os termos da sequência.

Note que qualquer outro valor maior do que B também é uma cota superior para a sequência (a_n), isto é, uma sequência limitada superiormente possui uma infinidade de cotas superiores.

Exemplo 1.7 A sequência (a_n) dada por

$$a_n = e^{-2n}$$

é limitada superiormente e $B = 1$ é uma cota superior para essa sequência. De fato, das propriedades da função exponencial, sabemos que $e^{-x} \leq 1$ se $x \geq 0$. Portanto, para $x = 2n$, sendo $n = 1, 2, \ldots$, temos $e^{-2n} \leq 1$. □

Exemplo 1.8 A sequência (b_n) (veja Exemplo 1.4) das somas dos inteiros positivos não é limitada superiormente, uma vez que seus valores aumentam (já que é crescente) e não encontram barreiras à direita. Para vermos isso, basta notarmos que $b_n \geq n$ para todo n. Assim, se um número B fosse uma cota superior para essa sequência ele teria que ser maior do que qualquer número inteiro positivo, o que seria impossível. □

Da mesma forma, vemos que a sequência de Fibonacci (f_n) dada em (1.1) também não é limitada superiormente, conforme podemos concluir do exercício seguinte.

Exercício 1.2 Mostre que a sequência de Fibonacci (f_n) dada por (1.1) no Exemplo 1.3 satisfaz $f_n \geq n - 1$ para todo n. □

De modo inteiramente análogo, dizemos que uma sequência (b_n) é **limitada inferiormente** quando todos os seus termos são maiores do que um valor constante A, denominado **cota inferior** da sequência. Ou seja, quando

$$A \leq b_n \quad \text{para todo } n.$$

(Observe que uma sequência limitada inferiormente possui infinitas cotas inferiores.)

Quando uma sequência (c_n) é tanto limitada inferiormente quanto limitada superiormente, dizemos simplesmente que essa sequência é **limitada**. Neste caso, observamos que existe um número $K \geq 0$ tal que

$$|c_n| \leq K \quad \text{para todo } n. \tag{1.3}$$

Realmente, se A e B são, respectivamente, cota inferior e cota superior para a sequência (c_n), então basta escolhermos K o maior entre os números $|A|$ e $|B|$. Assim, uma vez que $A \leq c_n \leq B$, se $c_n \geq 0$, então $|c_n| = c_n \leq B \leq |B| \leq K$; e se $c_n < 0$, então $|c_n| = -c_n \leq -A \leq |A| \leq K$, mostrando que $|c_n| \leq K$ sempre.

Exemplo 1.9 A sequência $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ é limitada, pois $A = -1$ é cota inferior para esta sequência e $B = \dfrac{1}{2}$ é cota superior para ela. Observe que $A = -1$ é o primeiro termo de (b_n) e $B = \frac{1}{2}$ é o segundo termo desta sequência. Assim, neste exemplo, todos os termos da sequência ficam restritos ao intervalo $J = [b_1, b_2] = [A, B]$ compreendido entre o primeiro e segundo termos da sequência, conforme mostra a Figura 1.2. Neste caso, $K = 1$. □

1.1.3 Operações com sequências

Podemos formar novas sequências a partir de duas sequências (a_n) e (b_n) dadas. Por exemplo, podemos somar termo a termo as duas sequências para obtermos a sequência $c_n = a_n + b_n$, a qual ainda podemos representar por $(a_n + b_n)$. Analogamente, podemos formar as sequências $(a_n - b_n)$, $(a_n b_n)$ e $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$. Esta última requer $b_n \neq 0$.

Também podemos multiplicar todos os termos de uma sequência (a_n) por um valor k para obtermos a sequência (ka_n) ou ainda somar ou subtrair k a todos os termos de (a_n) para obtermos as sequências $(a_n + k)$ e $(a_n - k)$.

Existem outras formas de obtermos sequências a partir de uma sequência (a_n) dada. Por exemplo, se todos os termos a_n são positivos, podemos formar as sequências $(\ln a_n)$ ou $(\sqrt{a_n})$.

1.2 Sequências convergentes e limites

Algumas sequências (a_n) possuem a propriedade de se aproximarem de certo valor L à medida que aumentamos os valores de n, de uma forma, digamos, organizada. Quando isso ocorre, dizemos que a sequência converge ou tem limite L e escrevemos

$$\lim a_n = L.$$

Mais precisamente, isso significa que os termos da sequência (a_n) se acumulam em torno de um certo valor L (mas não necessariamente assumem esse valor) no seguinte sentido: qualquer **intervalo aberto** J **contendo o número** L conterá também todos os termos da sequência que possuem ordem maior do que um determinado inteiro positivo N, isto é, conterá todos os elementos $a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \ldots$.

A ordem N a partir da qual todos os termos estarão no intervalo J depende do próprio intervalo. Em geral, diminuíndo-se J deve-se aumentar a ordem N a partir da qual todos os termos de ordem maior caem no intervalo J.

Do ponto de vista do formalismo matemático, essa forma de expressarmos e de visualizarmos o conceito de limite é equivalente à seguinte definição (tente verificar essa equivalência):

Definição 1.1 *Dizemos que uma sequência (a_n) tem limite L e escrevemos $\lim a_n = L$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ dado existir um inteiro positivo N de modo que*

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ para todo } n > N. \tag{1.4}$$

Note que a desigualdade (1.4) diz que $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ para todo $n > N$, ou seja, ela diz que todos os termos a_{N+1}, $a_{N+2}, a_{N+3}, \ldots$ estarão no intervalo $J_\varepsilon = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ cujo comprimento 2ε é dado arbitrariamente. Em outras palavras, escolhendo-se um valor qualquer para ε e fixando-o, deve-se encontrar uma ordem N tal que todos os termos da sequência que possuem ordem superior a N estejam no intervalo J_ε.

Essas definições equivalentes não devem soar estranhas para os alunos que cursaram as disciplinas iniciais de Cálculo. De fato, elas consistem basicamente na reprodução da definição de $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ quando $a_n = f(n)$, com x substituído por n (restrição do domínio original ao conjunto dos

números inteiros positivos). Nesse caso, a seguinte regra pode ser utilizada:

$$\text{se } \lim_{x\to\infty} f(x) = L, \text{ então } \lim a_n = L.$$

Exemplo 1.10 Para a sequência constante (a_n), em que $a_n = k$ para todo n, temos

$$\lim a_n = \lim k = k.$$

Neste exemplo simples é claro que qualquer intervalo J contendo k conterá também todos os termos da sequência (isto é, $N = 1$ sempre), pois todos eles são iguais a k. □

Exemplo 1.11 A sequência $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ é dada pela função $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ com x restrito ao conjunto dos inteiros positivos. Assim,

$$\lim a_n = 1, \text{ pois } \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

(Note que $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) = 1$.) □

A partir do conceito de limite podemos, de imediato, perceber duas propriedades das sequências convergentes. A primeira é a **unicidade do limite**. Isto é, uma sequência não pode ter mais do que um limite. Isto decorre da definição de limite como explicado a seguir.

Suponhamos que L_1 e L_2 fossem, ambos, limites de uma sequência (a_n) e que $L_1 \neq L_2$. Então poderíamos tomar um intervalo J_1 contendo L_1 e outro intervalo J_2 contendo L_2 de modo que J_1 e J_2 fossem disjuntos (note que $L_1 \neq L_2$). Daí, existiriam N_1 e N_2 tais que todos os termos de ordem maior do que N_1 estariam no intervalo J_1 e todos os termos de ordem maior do que N_2 estariam no intervalo J_2. Mas, isto levaria a um absurdo ao aplicarmos a definição, pois concluiríamos que todos os termos, a partir de uma certa ordem (a maior entre N_1 e N_2), estariam em ambos os intervalos J_1 e J_2. Mas eles são disjuntos!

A outra propriedade relacionada a **sequências convergente**s é que elas **são limitadas**. De fato, se uma sequência (a_n) tem limite L, então sabemos que ao escolhermos um intervalo aberto J em torno de L haverá uma ordem N a partir da qual todos os termos $a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \ldots$ estarão nesse intervalo. Assim, os termos restantes que eventualmente não estejam nesse intervalo são em quantidade finita. São eles $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N$. Portanto, podemos "alargar"o intervalo J, isto é, podemos encontrar um novo intervalo aberto (α, β) que contenha o intervalo J e também todos os N primeiros elementos da sequência. Claramente, esse intervalo conterá todos os termos da sequência (a_n). Daí teremos

$$\alpha < a_n < \beta \text{ para todo } n,$$

mostrando que α e β são, respectivamente, cota inferior e cota superior para a sequência (a_n).

Quando uma sequência não converge, dizemos que ela é **divergente** ou que **diverge**. O não cumprimento de uma das duas propriedades inerentes às sequências convergentes (descritas acima) é suficiente para assegurar

que uma dada sequência diverge. Por exemplo, se uma sequência se acumula em torno de dois valores distintos, isto é, ela possui infinitos termos que se aproximam de um valor L_1 e os outros termos, também em quantidade infinita, se aproximam de outro valor L_2, então esta sequência não pode ser convergente, pois ela tem dois limites (tente explicar isso melhor).

Exemplo 1.12 A sequência $a_n = (-1)^n$ não converge pois seus termos se acumulam em torno de dois valores distintos: -1 e 1. Na realidade, a sequência assume somente esses dois valores e sua representação na reta numérica requer que os termos de ordem par (infinitos termos) sejam grafados sobre o número 1 e os termos de ordem ímpar (também infinitos termos) sobre o número -1. □

Outros exemplos de sequências que não convergem são aquelas ilimitadas, inferiormente ou superiormente. Isto é, aquelas que não possuem cota inferior ou aquelas que não possuem cota superior.

Exemplo 1.13 A sequência $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots$ definida por $c_n = n\,(-1)^n$ não possui nem cota superior nem cota inferior, pois seus termos de ordem par são positivos e crescem arbitrariamente (ultrapassam qualquer valor fixado), enquanto os termos de ordem ímpar são negativos e decrescem arbitrariamente (ficam à esquerda de qualquer fixado). □

Por outro lado, se infinitos termos de uma sequência (a_n) se acumulam em torno de um número L, e os outros termos, também em quantidade infinita, se acumulam em torno do mesmo número L, então a sequência (a_n) é convergente e tem limite L.

Exercício 1.3 Seja (a_n) uma sequência e a partir dela construa duas outras sequências, (b_n) e (c_n), da seguinte forma:

$$b_n = a_{2n} \;\text{ e }\; c_n = a_{2n-1}.$$

Isto é, (b_n) é a sequência $a_2, a_4, a_6, \ldots$ formada pelos termos de ordem par de (a_n) enquanto (c_n) é a sequência $a_1, a_3, a_5, \ldots$ formada pelos termos de ordem ímpar de (a_n).

Mostre que se (b_n) e (c_n) convergem, ambas, para o (mesmo) número L, então (a_n) também converge para L. Ou seja, que

$$\text{se }\; \lim a_{2n} = L = \lim a_{2n-1}, \;\text{ então }\; \lim a_n = L.$$

□

1.2.1 Limites infinitos

Existem sequências divergentes que, apesar de serem ilimitadas (inferiormente ou superiormente), se comportam de maneira especial, como explicamos a seguir.

Dizemos que uma sequência (a_n) tem limite $+\infty$, e escrevemos

$$\lim a_n = +\infty,$$

se, para cada número **arbitrário** M dado, existir uma ordem N tal que todos os termos de ordem maior que N ficam à direita de M. Ou seja:

$$a_n > M \text{ para todo } n > N.$$

Analogamente, dizemos que uma sequência (b_n) tem limite $-\infty$, e escrevemos

$$\lim b_n = -\infty,$$

se, para cada número **arbitrário** M dado, existir uma ordem N tal que

$$b_n < M \text{ para todo } n > N.$$

Ambas as situações retratam sequências divergentes que possuem **limites infinitos.**

Observe que, de acordo com as definições acima de limites infinitos, uma sequência crescente (a_n) que não possui cota superior deve satisfazer $\lim a_n = +\infty$, assim como uma sequência decrescente (b_n) que não possui cota inferior deve satisfazer $\lim b_n = -\infty$.

Essas representações de limites infinitos não devem ser estranhas aos alunos que cursaram disciplinas iniciais de Cálculo, pois são análogas aos casos dos limites de funções: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

Na prática, no caso em que $c_n = f(n)$ para alguma função $f(x)$ podemos utilizar as seguintes regras:

- se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, então $\lim c_n = +\infty$.
- se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, então $\lim c_n = -\infty$.

1.2.2 Operações com limites

Não é difícil deduzir, a partir do significado do conceito de limite, que são válidas as seguintes operações com limites, admitindo-se que (a_n) e (b_n) sejam sequências convergentes (portanto, $\lim a_n$ e $\lim b_n$ são números) e que k seja uma constante:

1. $\lim (ka_n) = k (\lim a_n)$.
2. $\lim (a_n + k) = (\lim a_n) + k$.
3. $\lim (a_n + b_n) = (\lim a_n) + (\lim b_n)$.
4. $\lim (a_n - b_n) = (\lim a_n) - (\lim b_n)$.
5. $\lim (a_n b_n) = (\lim a_n) \times (\lim b_n)$.
6. $\lim \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$, desde que $\lim b_n \neq 0$.
7. Se $f : (\alpha, \beta) \to R$ é uma função **contínua** de uma variável e tal que $a_n \in (\alpha, \beta)$, então
$$\lim f(a_n) = f(\lim a_n). \tag{1.5}$$

Note que a existência dos limites à esquerda das igualdades nos itens de 1 a 6 e em (1.5) está implícita nos próprios enunciados, isto é, eles existem desde que os da direita também existam e são calculados pelas correspondentes fórmulas ou identidades.

As demonstrações dos itens acima utilizam argumentos inteiramente similares aos empregados nas provas de operações com limites de funções (veja Stewart (2006, v. 1)).

Exemplo 1.14 Neste exemplo vamos considerar a sequência (a_n) dada por

$$a_n = e^{\frac{1}{n}}.$$

Nesse caso, $a_n = f(\frac{1}{n})$ em que $f(x) = e^x$. Portanto, como $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ e como a função exponencial e^x é contínua, podemos concluir de (1.5) que

$$\lim a_n = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n}\right)} = e^0 = 1.$$

□

Dizemos que uma sequência (a_n) **converge absolutamente** se a sequência de seus valores absolutos $(|a_n|)$ é convergente. O próximo exemplo mostra, como outra consequência de (1.5), que toda sequência convergente deve, obrigatoriamente, ser absolutamente convergente.

Exemplo 1.15 Seja (a_n) uma sequência convergente e seja $L = \lim a_n$. Uma vez que a função modular $f(x) = |x|$ é contínua, a propriedade (1.5) aplicada à sequência $(|a_n|)$ nos diz que

$$\lim |a_n| = |\lim a_n|\,.$$

Isto é, que $(|a_n|)$ é convergente e tem limite $|L|$. □

No próximo exemplo exibimos uma sequência (a_n) que é divergente mas tal que $\lim |a_n| = 1$. Isto mostra que a recíproca do Exemplo 1.15 não é sempre verdadeira.

Exemplo 1.16 Considere a sequência (a_n) definida por

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Esta sequência é divergente, pois os termos de ordem par se aproximam de 1, enquanto os termos de ordem ímpar se aproximam de -1. De fato, os termos de ordem par são

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \ldots$$

e os termos de ordem ímpar são

$$-\frac{2}{1}, -\frac{4}{3}, -\frac{6}{5}, \ldots$$

Note que os termos de ordem par formam uma sequência (b_n) definida por $b_n = \frac{2n+1}{2n}$, enquanto os termos de ordem ímpar formam outra sequência (c_n) definida por $c_n = -\frac{2n}{2n-1}$. Desta forma,

$$\lim b_n = \lim \frac{2 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{2 + \lim \frac{1}{n}}{2} = 1$$

e

$$\lim c_n = -\lim \frac{2n}{2n-1} = -\frac{2}{2 - \lim \frac{1}{n}} = -1.$$

Por outro lado, a sequência dos valores absolutos $(|a_n|)$ é convergente e seu limite é $L = 1$, uma vez que

$$\lim |a_n| = \lim \frac{n+1}{n} = \frac{1 + \lim \frac{1}{n}}{1} = \frac{1+0}{1} = 1.$$

□

A recíproca do Exemplo 1.15 é verdadeira somente para o caso em que $L = 0$, conforme mostramos a seguir.

Teorema 1.1 $\lim a_n = 0$ *se, e somente se,* $\lim |a_n| = 0$.

Demonstração do teorema: De acordo com o Exemplo 1.15, só precisaríamos mostrar a afirmação direta: se $\lim |a_n| = 0$ então $\lim a_n = 0$. Entretanto, os argumentos para demonstrar esta parte do teorema também servem para demonstrar a afirmação inversa, já demonstrada no Exemplo 1.15. Ela se baseia na seguinte propriedade, válida somente para o número 0:

$$||x| - 0| = |x - 0|\,, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

isto é, a distância de $|x|$ até 0 é a igual à distância de x até 0. (Note que esta propriedade não é válida para outra constante que não seja 0.)

Assim, se J_ε é um intervalo aberto simétrico em relação ao número 0, isto é, se $J_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$, então $a_n \in J_\varepsilon$ se, e somente se, $|a_n| \in J_\varepsilon$. Ou seja,

$$-\varepsilon < a_n < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < |a_n| < \varepsilon.$$

Portanto, dado um intervalo aberto arbitrário contendo o valor 0 sempre podemos escolher um outro intervalo aberto J_ε, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $J_\varepsilon \subset J$. Daí segue que $a_n \in J_\varepsilon$ para todo $n > N$ se, e somente se, $|a_n| \in J_\varepsilon$ para todo $n > N$. □

Exemplo 1.17 A sequência (a_n) definida por $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ tem limite $L = 0$, pois

$$\lim |a_n| = \lim \frac{1}{n^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

□

Encerramos esta seção observando que, se a partir de uma dada sequência convergente (a_n), formarmos uma nova sequência (b_n) apenas alterando uma **quantidade finita** de termos da sequência (a_n), então (b_n) ainda será convergente e terá o mesmo limite de (a_n). Além disso, se simplesmente dispensarmos uma quantidade finita de termos de uma sequência (a_n), os termos restantes ainda formarão uma sequência (b_n). Por exemplo, se dispensarmos os 38 primeiros termos da sequência (a_n) poderemos formar a sequência (b_n) pela regra $b_n = a_{38+n}$, isto é,

$$b_1 = a_{39}, \quad b_2 = a_{40}, \quad b_3 = a_{41}, \quad \ldots \quad , \quad b_n = a_{38+n}.$$

Nesta situação, se (a_n) é uma sequência convergente, então (b_n) também será convergente e ambas terão o mesmo limite, pois o comportamento de ambas as sequências quando n se torna cada vez maior, isto é, quando $n \to \infty$, é o mesmo.

Portanto, quando estivermos interessados no cálculo do limite de uma sequência que resulta de uma operação envolvendo outra(s) sequência(s), desconsideraremos os termos que não forem bem definidos, desde que ocorram em uma quantidade finita. Veja o próximo exemplo.

Exemplo 1.18 Vamos calcular $L = \lim \frac{2n^2+2n+5}{n^2-16}$. Note que o termo de ordem 4 da sequência não está bem definido, uma vez que o denominador se anula quando $n = 4$. Mas, como se trata de apenas um termo (uma quantidade finita) podemos desconsiderá-lo no seguinte cálculo do limite:[1]

$$
\begin{aligned}
L &= \lim \frac{2n^2+2n+5}{n^2-16} \\
&= \lim \frac{2+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{1-\frac{16}{n^2}} \\
&= \frac{(\lim 2) + \left(\lim \frac{2}{n}\right) + \left(\lim \frac{5}{n^2}\right)}{(\lim 1) - \left(\lim \frac{16}{n^2}\right)} = \frac{2+0+0}{1-0} = 2.
\end{aligned}
$$

□

1.2.3 Teoremas de convergência

Veremos nesta seção alguns critérios para convergência de sequências.

Teorema 1.2 (Regra do sanduíche) *Suponha que*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \text{ para todo } n > N_0$$

e que as sequências (a_n) e (c_n) tenham, ambas, o mesmo limite L. Então (b_n) é convergente e L é o seu limite.

Demonstração do teorema: Seja $J = (\alpha, \beta)$ um intervalo aberto contendo L. Como ambas as sequências (a_n) e (c_n) convergem para L, existe $N > N_0$ tal que os termos a_n e c_n pertencem a J se $n > N$. Assim,

$$\alpha < a_n \leq b_n \leq c_n < \beta \text{ para todo } n > N.$$

Logo, $b_n \in J$ para todo $n > N$, mostrando que $\lim b_n = L$. □

A seguir, uma consequência da regra do sanduíche.

Teorema 1.3 *Seja (a_n) uma sequência limitada (não necessariamente convergente) e seja (b_n) uma sequência que tem limite $L = 0$. Então, a sequência produto $(a_n b_n)$ tem limite $L = 0$. Ou seja,*

$$\text{se } (a_n) \text{ é limitada e se } \lim b_n = 0, \text{ então } \lim a_n b_n = 0.$$

Demonstração do teorema: Como (a_n) é limitada, segue de (1.3) que existe $K \geq 0$ tal que

$$|a_n| \leq K, \text{ para todo } n.$$

Portanto, como $|a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq K |b_n|$ temos

$$0 \leq |a_n b_n| \leq K |b_n|.$$

Como $\lim |b_n| = 0$ (pois $\lim b_n = 0$), podemos utilizar a regra do sanduíche para as sequências (0) – sequência constante cujos termos são todos nulos –, $(|a_n b_n|)$ e $(k |b_n|)$, para concluir que $\lim |a_n b_n| = 0$ e, daí, que $\lim a_n b_n = 0$, em vista do Teorema 1.1. □

[1] Note que antes de calcularmos o limite dividimos todos os termos do numerador e todos os termos do denominador por n^2.

Exemplo 1.19 A aplicação direta do Teorema 1.3 nos diz que

$$\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Isto porque a sequência $a_n = (-1)^n$ é limitada (apesar de ser divergente, conforme Exemplo 1.12), enquanto que a sequência $b_n = \frac{1}{n}$ tende a 0. Este exemplo ilustra o seguinte fato que merece ser enfatizado no Teorema 1.3: a sequência (a_n) não precisa ser convergente. Basta que ela seja limitada. □

Exemplo 1.20 O fato de (a_n) ser limitada é essencial no Teorema 1.3. Podemos identificar isso nos seguintes exemplos simples:

- $a_n = n^2$ e $b_n = \frac{1}{n}$.
- $a_n = n^2$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$.

Nesses dois exemplos temos $\lim b_n = 0$. Mas, no primeiro $\lim a_n b_n = +\infty$, enquanto que no segundo $\lim a_n b_n = 1 \neq 0$. □

Os próximos teoremas dão critérios para a convergência de uma sequência, mas não indicam como calcular seu limite. Mesmo assim, eles são úteis, pois em algumas situações o fato de sabermos que uma sequência é convergente nos ajuda a encontrarmos o seu limite. Mais adiante, daremos exemplo de uma tal situação.

Teorema 1.4 *Se (a_n) é uma sequência* ***crescente*** *e* ***limitada superiormente****, então (a_n) é convergente, isto é, existe um número S tal que*

$$\lim a_n = S.$$

Teorema 1.5 *Se (b_n) é uma sequência* ***decrescente*** *e* ***limitada inferiormente****, então (b_n) é convergente, isto é, existe um número I tal que*

$$\lim b_n = I.$$

As demonstrações desses dois teoremas não são simples e requerem o conhecimento dos conceitos de supremo e ínfimo de um conjunto de números reais. O número S acima é, precisamente, o supremo do conjunto $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ e é definido como a menor das cotas superiores desse conjunto. Por sua vez, o número I acima é o ínfimo do conjunto $\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ e é definido como a maior das cotas inferiores desse conjunto.

Exemplo 1.21 Seja r um número tal que $-1 < r < 1$. Vamos mostrar neste exemplo que $\lim |r|^n = 0$ e que, portanto, $\lim r^n = 0$ (conforme Teorema 1.1, uma vez que $|r^n| = |r|^n$). Primeiramente, se $r = 0$ o resultado que queremos mostrar é trivial. Assim, vamos nos ater somente ao caso em que $0 < |r| < 1$. Vemos de imediato que a sequência $|r|^n$ é limitada inferiormente por zero, pois $0 < |r|^n$ para todo n. Além disso, ela é decrescente, pois

$$|r|^{n+1} < |r|^n \quad \text{para todo } n.$$

(Note que essa desigualdade decorre do fato de que $0 < |r| < 1$.) Portanto, $|r|^n$ é uma sequência convergente. Seja $L = \lim |r|^n$. Então, a sequência $|r|^{n+1}$ também tem o mesmo limite, pois ela é obtida da sequência $|r|^n$ excluindo-se o primeiro termo desta última. Logo, $\lim |r|^{n+1} = L$. Agora, calculando o limite de ambos os lados da igualdade $|r|^{n+1} = |r|\,|r|^n$, encontramos

$$\lim |r|^{n+1} = |r| \left(\lim |r|^n\right),$$

ou, equivalentemente,

$$L = |r|\, L.$$

Daí decorre que $L = 0$, pois se tivéssemos $L \neq 0$ poderíamos dividir ambos os lados da igualdade acima por L e obteríamos $1 = |r|$, o que é absurdo, já que $0 < |r| < 1$. Segue deste exemplo que:

- $\lim \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.$
- $\lim \dfrac{(-2)^n}{5^n} = 0.$
- $\lim \frac{5^n}{6^{n+1}} = \lim \left[\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n\right] = \frac{1}{6} \lim \left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{1}{6} \times 0 = 0.$

□

Note que no exemplo acima pudemos calcular o limite da sequência apenas sabendo que tal limite existia.

Exercícios

1. Suponha que

$$a_n \leq b_n \text{ para todo } n > N_0$$

e que as sequências (a_n) e (b_n) convergem, respectivamente, para a e b (isto é, $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$). Mostre que $a \leq b$.

2. Considerando as sequências (a_n) e (b_n) definidas por

$$a_n = \frac{n^2+1}{2n^2+3} \text{ e } b_n = e^{-\frac{n}{n+1}}$$

calcule os seguintes limites:

(a) $\lim (2a_n + 3b_n)$.

(b) $\lim (a_n - 3b_n)$.

(c) $\lim \left(b_n^{\frac{3}{2}}\right)$.

(d) $\lim \left(\frac{a_n}{4b_n}\right)$.

(e) $\lim \cos (\pi b_n)$.

(f) $\lim a_n^{b_n}$ (lembre-se que $a^b = e^{b \ln a}$ para $a > 0$).

(g) $\lim \left(\frac{a_n}{n}\right)$.

(h) $\lim \left(b_n^{-n^2}\right)$.

AULA 2

Séries numéricas

OBJETIVOS

- Desenvolver o conceito de série numérica.
- Definir convergência e divergência de uma série numérica.
- Apresentar e estudar as séries geométrica e harmônica.
- Apresentar algumas operações com séries.
- Dar exemplos de algumas manipulações com índices.
- Demonstrar uma condição necessária para a convergência de uma série numérica.
- Demonstrar um critério de convergência para séries alternadas.

2.1 Convergência e divergência

Consideremos uma sequência numérica (a_n) e pensemos na soma de todos os seus termos, isto é, na soma infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Uma tal soma infinita, denotada por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, é o que chamamos de **série numérica** de termo geral a_n. Entretanto, podemos entendê-la como o limite, caso exista, da sequência $S_1, S_2, S_3, \ldots$ em que

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_N &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N. \end{aligned}$$

Utilizando uma notação compacta podemos reescrever[1]

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Se esta sequência (S_N), denominada **Sequência das somas parciais da série** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, for convergente, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente** ou que ela **converge** e denotamos o limite de (S_N) pelo mesmo símbolo utilizado para denotar a série. Assim,

$$\lim S_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{2.1}$$

Nesse caso, dizemos, também, que o número $\lim S_N$ é a **soma da série** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Talvez seja mais confortável para o leitor reescrever (2.1) da seguinte forma equivalente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Caso a sequência das somas parciais (S_N) não seja convergente, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **divergente** ou que ela **diverge**. Ainda nesse caso, se $\lim S_N = +\infty$ ou $\lim S_N = -\infty$, então escrevemos, respectivamente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \text{ ou } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty.$$

2.1.1 A série geométrica

No Ensino Médio nos deparamos com a série[2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots,$$

a qual conhecemos por série geométrica de razão r.

O termo geral dessa série é r^{n-1}, e para calcularmos $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ utilizamos o seguinte artifício, válido para $r \neq 1$,, que nos permite expressar S_N explicitamente em termos de r^N e daí calcular $\lim S_N$. Primeiramente, escrevemos

$$S_N = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{N-1}.$$

Em seguida, multiplicamos ambos os lados dessa igualdade por r e obtemos

$$rS_N = r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^N.$$

Então, subtraindo rS_N de S_N encontramos

$$\begin{aligned} S_N(1-r) &= \left(1 + r + r^2 + \cdots + r^{N-1}\right) - \left(r + r^2 + r^3 + \cdots + r^N\right) \\ &= 1 - r^N \end{aligned}$$

[1] Normalmente, o índice na representação do limitante superior do somatório é excluído da notação. Entretando, a rigor, deveríamos escrever $\sum_{n=1}^{n=N} a_n$ em lugar de $\sum_{n=1}^{N} a_n$. Faremos isto quando julgarmos que é didaticamente interessante.

[2] Note a convenção $r^0 = 1$, mesmo se $r = 0$.

e daí obtemos a expressão alternativa para S_N :

$$S_N = \frac{1 - r^N}{1 - r}. \tag{2.2}$$

Por fim, fazemos $N \to \infty$ na expressão acima, ou seja, calculamos o limite (quando $N \to \infty$) da sequência (S_N) :

$$\lim S_N = \frac{1 - \lim r^N}{1 - r}.$$

Portanto, se $r \neq 1$, a convergência da série geométrica está vinculada à convergência da sequência (r^N). Logo, para finalizar o cálculo do limite de S_N, no caso em que $r \neq 1$, precisamos calcular o limite da sequência r^N. Já vimos no Exemplo 1.21 que se $-1 < r < 1$ então $\lim r^N = 0$. Assim, se a razão r da série geométrica tiver módulo menor do que 1, então $\lim S_N = \frac{r}{1-r}$, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{r}{1-r} \quad \text{se } |r| < 1.$$

Também decorre de (2.2) que $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ é divergente se $r \leq -1$. Isto porque a sequência r^N é divergente nesse caso (note que os termos de ordem par da sequência (r^N) crescem arbitrariamente e são positivos, enquanto os termos de ordem ímpar dessa sequência decrescem arbitrariamente e são negativos).

No caso em que $r = 1$ não podemos utilizar a expressão (2.2) por causa do denominador (ele se anula se $r = 1$), mas podemos calcular diretamente as somas parciais:

$$S_N = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{N \text{ parcelas}} = N.$$

Segue desta expressão que a série geométrica é divergente se $r = 1$ e ainda podemos escrever

$$\lim S_N = +\infty.$$

No caso em que $r > 1$, temos de (2.2) que $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = +\infty$, uma vez que $\lim r^N = +\infty$ e, assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{r - \lim r^N}{1 - r} = \frac{-r + \lim r^N}{r - 1} = +\infty.$$

Concluímos, portanto, que a série geométrica de razão r é divergente se $r \leq -1$ ou se $r \geq 1$ e convergente se $|r| < 1$, sendo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-r} & \text{se } -1 < r < 1 \\ +\infty & \text{se } r \geq 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

A série geométrica aparece em várias aplicações e até na própria matemática como nas representações decimais. Por exemplo,

$$\frac{10}{9} = \sum_{n=1}^{\infty} (0,1)^{n-1}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}\frac{10}{9} &= 1,11111\cdots \\ &= 1+0,1+0,01+0,001+0,0001+0,00001\cdots \\ &= 1+(0,1)+(0,1)^2+(0,1)^3+(0,1)^4+(0,1)^5\cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(0,1)^{n-1}.\end{aligned}$$

Para nos certificarmos de que essas contas fecham, basta recorrermos a (2.3) com $r = 0,1$ para diretamente obtermos

$$\sum_{n=1}^{\infty}(0,1)^{n-1} = \frac{1}{1-0,1} = \frac{1}{0,9} = \frac{10}{9}.$$

Exemplo 2.1 Vamos calcular a soma da seguinte série geométrica de potências pares para $0 < |r| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} = r^2 + r^4 + r^6 + \cdots .$$

Para isto, basta utilizarmos um fato que já conhecemos: $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ se $|x| < 1$. Daí, trocando x por r^2 (pois $|r^2| < 1$ uma vez que $|r| < 1$) encontramos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(r^2\right)^{n-1} = \frac{1}{1-r^2}.$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} = r^2\sum_{n=1}^{\infty} r^{2(n-1)} = r^2\left(\frac{1}{1-r^2}\right).$$

Concluímos, então, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} = \frac{r^2}{1-r^2} \quad \text{para } 0 < |r| < 1. \tag{2.4}$$

Se $r = 0$, então esta expressão também é verdadeira, pois a somas parciais da série são todas nulas, ou seja, a soma da série é zero. □

Exercício 2.1 Encontre uma expressão para a soma parcial $S_N = r^2 + r^4 + r^6 + \cdots + r^{2N}$ multiplicando-a por $1 - r^2$. Utilize a expressão que você encontrou para reobter (2.4) do exemplo acima. (Sugestão: imite os procedimentos que utilizamos para o cálculo da série geométrica completa.) □

Exemplo 2.2 Podemos utilizar as séries geométricas para escrever a representação decimal infinita de um número como uma fração. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
0,031313131\cdots &= 0,031 + 0,00031 + 0,0000031 + \cdots \\
&= \frac{31}{1000} + \frac{31}{100000} + \frac{31}{10000000} \\
&= \frac{31}{10}\left[\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \left(\frac{1}{10}\right)^6 + \cdots\right] \\
&= \frac{31}{10} \times \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{31}{10}\frac{1}{99} = \frac{31}{990}.
\end{aligned}$$

□

Exercício 2.2 Utilize a série geométrica para escrever o número $0,1222222\cdots$ como uma fração.

□

2.1.2 A série harmônica

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

é conhecida como série harmônica. Veremos a seguir que ela é divergente e que, na realidade, sua soma é $+\infty$.

Inicialmente, observemos que as somas parciais dessa série formam uma sequência crescente, uma vez que $\frac{1}{n} > 0$. Assim,

$$S_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N} = S_{N-1} + \frac{1}{N} > S_N.$$

Agora, acompanhemos as seguintes estimativas que nos mostrarão que (S_N) não possui cota superior:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 > \tfrac{1}{2} \\
S_2 &= 1 + \tfrac{1}{2} > \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 = \tfrac{2}{2} \\
S_4 &= S_2 + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) > \tfrac{2}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{2}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} \\
S_8 &= S_4 + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) \\
&> \tfrac{3}{2} + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{4}{2} \\
S_{16} &= S_8 + \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\
&> \tfrac{4}{2} + \left(\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) = \tfrac{4}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Vemos que, de modo geral, ocorre o seguinte

$$S_{2^k} > \frac{k+1}{2} \quad \text{para todo inteiro positivo } k.$$

Como a sequência $\left(\frac{k+1}{2}\right)$ é crescente e tem limite $+\infty$, ela ultrapassa qualquer número fixado, isto é, $\left(\frac{k+1}{2}\right)$ não possui cota superior. Assim, da desigualdade acima, concluímos que a sequência (S_{2^k}) também não possui cota superior.

Por fim, relembrando que (S_N) é crescente, concluímos que (S_N) também não possui cota superior[3] e que, portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \tag{2.5}$$

2.2 Operações com séries

A relação entre as somas parciais de uma série $\sum_{n=l}^{\infty} a_n$, que se inicia de um índice l, e as somas parciais da série $\sum_{n=s}^{\infty} a_n$, com o mesmo termo geral, mas iniciada em qualquer outro índice $s > l$ é

$$\sum_{n=l}^{N} a_n = a_l + a_{l+1} + \cdots + a_{s-1} + \sum_{n=s}^{N} a_n, \quad \text{para} \quad N > s > l.$$

Assim, estas sequências de somas parciais diferem somente por uma constante

$$C = a_l + a_{l+1} + \cdots + a_{s-1}.$$

Isto significa que com relação a convergência (ou divergência), o índice inicial da série é irrelevante: $\sum_{n=l}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, $\sum_{n=s}^{\infty} a_n$ é convergente. Porém, no caso da convergência de uma delas, os correspondentes valores das séries não são iguais, em geral, pois

$$\sum_{n=l}^{\infty} a_n = C + \sum_{n=s}^{\infty} a_n.$$

Exemplo 2.3 Neste exemplo vamos calcular $\sum_{n=5}^{\infty} (2^{-1})^{n-1}$ utilizando (2.3) para $r = 2^{-1}$, isto é, utilizando $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{-1})^{n-1} = \frac{1}{1-(2^{-1})} = 2$. Temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=5}^{\infty} \left(2^{-1}\right)^{n-1} &= \left(2^{-1}\right)^4 + \left(2^{-1}\right)^5 + \left(2^{-1}\right)^6 + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-1}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{4} \left(2^{-1}\right)^{n-1} \\
&= 2 - \left[1 + \left(2^{-1}\right) + \left(2^{-1}\right)^2 + \left(2^{-1}\right)^3\right] \\
&= 1 - \left(2^{-1}\right) - \left(2^{-1}\right)^2 - \left(2^{-1}\right)^3 = 1 - \frac{7}{8} = \frac{15}{8}.
\end{aligned}$$

□

[3] Se M é dado, então existe um K tal que $\frac{k+1}{2} > M$ para todo $k > K$. Em particular, $S_{2^k} > \frac{k+1}{2} > M$. Portanto, como (S) é crescente, todos os termos de ordem N maior do que 2^K ultrapassam M, isto é, $S_N > S_{2^k} > M$ para todo $N > 2^K$, mostrando que $\lim S_N = +\infty$.

As seguintes propriedades envolvendo séries convergentes decorrem imediatamente das propriedades de limites aplicadas às correspondentes sequências de somas parciais.

Teorema 2.1 (Operações com séries convergentes) *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *são séries convergentes, então:*

- $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *em que* c *é uma constante.*
- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Note que faz parte do enunciado acima, mesmo que implicitamente, a afirmação de que as séries à esquerda das igualdades são convergentes.

2.2.1 Manipulando índices

Agora vejamos algumas técnicas de manipulação de índices de somatórios em séries numéricas.

Se desejarmos expressar uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, que é iniciada pelo índice $n = 1$, por outra expressão em série na qual o índice inicial é $k = 0$, basta fazermos a mudança de índices de modo que $k = n - 1$ (pois $k = 0$ se, e somente se, $n = 1$). Assim, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pode ser representada por $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}$. Note que também temos que trocar n por $k + 1$ na expressão que fica dentro do somatório.

Porém, não necessitamos utilizar outra letra (k no caso) para reescrevermos a série iniciando com o índice 1. É suficiente trocarmos n por $n + 1$ em todos os lugares em que inicialmente aparece n. Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n+1=1}^{\infty} a_{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}$$

(note a operação no "pé"do somatório: $n + 1 = 1$ que resulta em $n = 0$). Isto fica mais claro quando expandimos todos os somatórios acima e verificamos que todos representam a mesma soma.

Por exemplo, usualmente a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ de razão r é apresentada nos livros na forma $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$. Perceba que isto está correto, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \sum_{n+1=1}^{\infty} r^{n+1-1} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$

Manipulações como as exemplificadas acima são úteis quando desejamos operar com duas séries ou mais e ainda "economizar" nas letras ou símbolos utilizados como índices.

Exemplo 2.4 O resultado da operação $3\sum_{n=3}^{\infty}(0,2)^{n-1} - 7\sum_{n=2}^{\infty}(0,2)^{n+1}$ envolvendo séries geométricas pode ser calculado de modo a utilizar a informação $\sum_{n=0}^{\infty}(0,2)^n = \frac{1}{1-(0,2)} = \frac{1}{0,8} = 1,25$. De acordo com essa ideia, devemos trocar as séries por outras equivalentes cujas expressões dentro dos somatórios sejam da forma r^n :

$$\begin{aligned}
3\sum_{n=3}^{\infty}(0,2)^{n-1} - 7\sum_{n=2}^{\infty}(0,2)^{n+1} &= 3\sum_{n+1=3}^{\infty}(0,2)^{n+1-1} - 7\sum_{n-1=2}^{\infty}(0,2)^{n-1+1}\\
&= 3\sum_{n=2}^{\infty}(0,2)^n - 7\sum_{n=3}^{\infty}(0,2)^n\\
&= 3\left((0,2)^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(0,2)^n\right) - 7\sum_{n=3}^{\infty}(0,2)^n\\
&= 3\,(0,2)^2 + (3-7)\sum_{n=3}^{\infty}(0,2)^n\\
&= 0,12 - 4\sum_{n=3}^{\infty}(0,2)^n\,.
\end{aligned}$$

Agora, para utilizarmos a informação acima, basta que reescrevamos $\sum_{n=3}^{\infty}(0,2)^n$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{\infty}(0,2)^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(0,2)^n - \left[(0,2)^0 + (0,2)^1 + (0,2)^2\right]\\
&= 1,25 - (1 + 0,2 + 0,04) = 0,01.
\end{aligned}$$

Observe, na primeira igualdade acima, que ao incluírmos a série iniciando em $n = 0$ acabamos incluindo também os termos referentes aos índices 0, 1 e 2. Por isso esses termos foram subtraídos (descontados). Esse procedimento assegurou que o valor de $\sum_{n=3}^{\infty}(0,2)^n$ não fosse alterado.

Daí, voltando um pouco mais acima, encontramos

$$3\sum_{n=3}^{\infty}(0,2)^{n-1} - 7\sum_{n=2}^{\infty}(0,2)^{n+1} = 0,12 - 4\times 0,01 = 0,08.$$

□

Exemplo 2.5 Neste exemplo vamos calcular a soma da série

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

Primeiro, notamos que

$$\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n+1)^2}$$

e que

$$\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n-1=3}^{n-1=N}\frac{1}{(n-1+1)^2} = \sum_{n=4}^{N+1}\frac{1}{n^2}.$$

Daí, então, decorre que

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right) &= \sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=4}^{N+1}\frac{1}{n^2}\\ &= \left(\frac{1}{3^2}+\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n^2}\right)-\left(\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(N+1)^2}\right)\\ &= \frac{1}{9}-\frac{1}{(N+1)^2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\lim\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{(N+1)^2}\right)=\frac{1}{9}.$$

□

Exercício 2.3 Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$. (Sugestão: Tente encontrar uma expressão para a soma parcial S_N da série que permita calcular o seu limite. Note que $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.) □

2.3 Um teste de divergência

A seguir, apresentamos uma propriedade que todas as séries convergentes obrigatoriamente possuem e que nos ajuda a verificar que algumas séries são divergentes.

Teorema 2.2 *Se a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *é convergente, então* $\lim a_n = 0$.

Demonstração do teorema: Seja $S_N=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}a_n$ a sequência das somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Então, se $N\geq 2$:

$$\begin{aligned}S_N &= a_1+a_2+a_3+\cdots+a_N\\ &= (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{N-1})+a_N\\ &= S_{N-1}+a_N.\end{aligned}$$

Portanto,

$$a_N=S_N-S_{N-1},\quad \text{para}\ \ N\geq 2. \tag{2.6}$$

Como a série converge, existe $S=\lim S_N$ e, além disso, S_{N-1} também converge para o mesmo limite. Logo,

$$\lim a_N=\lim S_N-\lim S_{N-1}=S-S=0.$$

□

Exemplo 2.6 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+5}$ é divergente, pois $\lim \frac{n^2}{2n^2+5} = \frac{1}{5} \neq 0$.

□

Como ilustra este exemplo, o teorema acima serve como um critério para identificar algumas séries divergentes. Vamos enunciá-lo a seguir.

Teorema 2.3 *Se* $\lim a_n \neq 0$ *ou se este limite não existe, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

Demonstração do teorema: Se a série fosse convergente então $\lim a_n$ teria que ser 0. □

Por outro lado, se encontrarmos $\lim a_n = 0$, não podemos afirmar se a série converge ou diverge. O próximo exemplo ilustra essa situação.

Exemplo 2.7 Já vimos em (2.5) que a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

No entanto, $\lim \frac{1}{n} = 0$. □

Encerramos esta seção com uma curiosidade a respeito da expressão (2.6). É que ela nos dá um método para construir exemplos de séries que conseguimos somar, como ilustramos a seguir.

Exemplo 2.8 Vamos utilizar (2.6) para encontrar uma série cuja soma parcial de ordem N seja $S_N = \frac{N}{N+2}$ para $N \geq 1$. De acordo com (2.6) devemos ter

$$\begin{aligned} a_N &= \frac{N}{N+2} - \frac{N-1}{N-1+2} \\ &= \frac{2}{N^2+3N+2}, \quad \text{para } N \geq 2. \end{aligned}$$

Para $N = 1$, temos $a_1 = S_1$ (a soma parcial é constituída de uma parcela somente). Logo, $a_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$, mostrando que a fórmula para a_N que deduzimos acima também é válida para $N = 1$.

Concluímos, então, que

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{2}{n^2+3n+2} \right) = \frac{N}{N+2}, \quad \text{para } N \geq 1.$$

Além disso, como $\lim S_N = 1$, encontramos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2+3n+2} \right) = 1.$$

□

2.4 Um critério de convergência para séries alternadas

Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **alternada** se a partir de alguma ordem N seus termos a_n são, alternadamente, positivos e negativos. Isto é, se

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n \text{ em que } b_n > 0 \text{ para todo } n > N.$$

Exemplos de séries alternadas são: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n^2 + \pi n\right)$.

Exercício 2.4 Verifique que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n^2 + \pi n\right)$ é alternada.[4] □

O seguinte teorema nos dá um critério de convergência para uma série alternada.

Teorema 2.4 (Teste da série alternada) *Se (b_n) é uma sequência **decrescente** tal que $\lim b_n = 0$, então a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ é convergente.*

Demonstração do teorema: Como (b_n) é decrescente a sequência (S_{2k}) das somas parciais de ordem par da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ é crescente e seus termos são positivos, pois:

$$\begin{aligned}
S_2 &= b_1 - b_2 > 0\\
S_4 &= S_2 + (b_3 - b_4) > S_2\\
S_6 &= S_4 + (b_5 - b_6) > S_4\\
&\vdots\\
S_{2k} &= S_{2k-2} + (b_{2k-1} - b_{2k}) > S_{2k-2}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, (S_{2k}) é limitada superiormente por b_1. De fato, temos

$$\begin{aligned}
S_{2k} &= b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - \cdots + b_{2k-1} - b_{2k}\\
&= b_1 + (b_3 - b_2) + (b_5 - b_6) + \cdots + (b_{2k-1} - b_{2k})\\
&< b_1,
\end{aligned}$$

uma vez que os termos entre parenteses são negativos.

Sendo crescente e limitada superiormente, a sequência (S_{2k}) é convergente. Mas, da seguinte relação

$$S_{2k+1} = b_1 - b_2 + b_3 - \cdots - b_{2k} + b_{2k+1} = S_{2k} + b_{2k+1}$$

entre a sequência (S_{2k}) e a sequência (S_{2k+1}), das somas parciais de ordem ímpar, deduzimos que esta última converge e tem o mesmo limite que a primeira, pois

$$\lim S_{2k} = \lim S_{2k+1} + \lim b_{2k+1} = \lim S_{2k+1},$$

[4] Sugestão: utilize a identidade trigonométrica: $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.

uma vez que $\lim b_{2k+1} = 0$. (Note que $\lim b_n = 0$ por hipótese.)

Seja S o limite de ambas as sequências (S_{2k}) e (S_{2k+1}). Então é claro (veja Exercício 1.3) que a sequência (S_N) também tem limite S. Portanto, a série alternada converge e sua soma é S. □

Nota 2.1 É claro que no teste da série alternada a sequência (b_n), além de ter limite zero, pode tornar-se decrescente somente a partir de uma dada ordem N.

Exemplo 2.9 A série harmônica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ é convergente, pois a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$ é decrescente e $\lim \frac{1}{n} = 0$. Note que essa série convergente é formada alternando-se o sinal dos termos da série harmônica, que é divergente. □

Exemplo 2.10 Neste exemplo vamos utilizar o teste da série alternada para mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n^2)}{n}$ é convergente. Antes, notamos que[5]

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n^2)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\ln n}{n} = -2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n,$$

em que $b_n = \frac{\ln n}{n}$. Precisamos, então, mostrar que $\lim b_n = 0$ e que (b_n) é decrescente a partir de alguma ordem N. Temos

$$\lim b_n = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \underbrace{=}_{\text{L´Hôpital}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Para verificarmos que (b_n) é decrescente vamos estudar o crescimento da função $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Uma vez que $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, vemos que $f'(x) < 0$ se, e somente se, $\ln x > 1$. Daí concluímos que $f(x)$ é decrescente para $x > e^1 \approx 2{,}7$. Portanto, (b_n) é uma sequência decrescente se $n \geq 3$. □

Nota 2.2 Vale ressaltar que se (b_n) não convergir para 0 ou não for uma sequência convergente, então podemos dizer, de imediato, que a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ é divergente. Isto ocorre por causa do teste de divergência 2.3 e porque (veja Teorema 1.1)

$$\lim (-1)^{n-1} b_n = 0 \text{ se, e somente se, } \lim b_n = 0,$$

uma vez que $\left|(-1)^{n-1} b_n\right| = b_n$.

[5] Lembrete: $\ln(a^b) = b \ln a$.

Exercícios

1. A soma parcial de ordem N da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é $S_N = \dfrac{2n}{n+1}$.
   (a) Encontre a expressão do termo geral a_n.
   (b) A série é convergente? Se for, calcule a sua soma.
2. Encontre a soma da série
   (a) $\sum_{n=4}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}}{3^n}$.
   (b) $\sum_{n=5}^{\infty} e^{-2n}$.
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{4^n} + \dfrac{1}{3^n}\right)$.
3. Utilize o resultado do Exercício 2.3 para calcular
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{(n+1)(n+2)}.$$
4. Faça o mesmo para calcular
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}.$$
5. Calcule a soma da série
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^4} - \frac{1}{(n+1)^4}\right).$$
6. Calcule a soma da série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}.$$
   (Sugestão: escreva $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$ em frações parciais e faça $x = 3n$. Em seguida, proceda como no Exemplo 2.5.)
7. Calcule a soma da série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{3^{n+1}}.$$
8. Mostre que a série é divergente.
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \operatorname{sen}(\frac{1}{n})$.
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$.

9. Determine se o teste da série alternada pode se aplicado para concluir que a série é convergente.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\ln\sqrt{n}}{n}$.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{n+5}$.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\cos n}{n}$.

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n}{n^2+1}$.

AULA 3

Testes de convergência

OBJETIVOS

- Apresentar e utilizar os testes da comparação, da razão e da integral.
- Apresentar e explorar o conceito de convergência absoluta como critério de convergência.

Neste capítulo vamos apresentar e explorar três testes que nos ajudam a determinar a convergência ou divergência de uma série.

Antes de passarmos a eles, gostaríamos de enfatizar que se uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é constituída de **termos positivos**, isto é, se $a_n > 0$ para todo n, então a sequência $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ de suas somas parciais é crescente, pois

$$s_{N+1} = s_N + a_n > s_N.$$

Portanto, se uma tal série é divergente, então, obrigatoriamente, ela deve satisfazer

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$$

Realmente, observando suas somas parciais, percebemos que elas formam uma sequência crescente que não possui cota superior (caso contrário, se possuísse uma cota superior, deveria ser convergente, pois é crescente).

3.1 O teste da comparação

Teorema 3.1 (Teste da comparação) *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de **termos positivos** tais que $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq 1$.*

(a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge, então* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge, isto é, se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$*, então* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

Demonstração do teorema: (a) Por hipótese $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, o que significa que a sequência $\left(\sum_{n=1}^{N} b_n\right)$ de suas somas parciais é convergente e, portanto, limitada. Assim, essa sequência possui uma cota superior M, isto é

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \leq M \text{ para todo } N.$$

Mas, da propriedade $a_n \leq b_n$ segue que a sequência $\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)$ das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também é limitada superiormente, pois

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} b_n \leq M \text{ para todo } N.$$

Por fim, sendo a sequência das somas parciais $\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)$ crescente (seus termos são positivos) e limitada superiormente, podemos concluir que ela é convergente e que, portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(b) Por hipótese $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente, isto é $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ (pois seus termos são positivos). Portanto, a sequência $\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)$ de somas parciais não possui cota superior. Mas isto significa que a sequência $\left(\sum_{n=1}^{N} b_n\right)$ de somas parciais também não possui cota superior. De fato, como $\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)$ ultrapassa qualquer cota superior, o mesmo ocorre com $\left(\sum_{n=1}^{N} b_n\right)$, uma vez que essa é maior ou igual a anterior (lembre-se de que $a_n \leq b_n$). Concluímos que a sequência crescente $\left(\sum_{n=1}^{N} b_n\right)$ não possui cota superior. Logo,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} b_N = \sum_{n=1}^{\infty} b_N = +\infty.$$

□

Como consequência da parte (a) do teorema acima, mostraremos, no exemplo a seguir, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente. Antes, porém, ressaltamos

que o teste da comparação é válido para séries que se iniciam de qualquer índice, não necessariamente de $n = 1$.

Exemplo 3.1 Neste exemplo mostraremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente comparando-a com a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$, a qual é convergente, conforme um exercício anterior (refazê-lo seria interessante).

Notando que $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ para $n \geq 2$ (pois essa desigualdade é equivalente a $n^2 - n < n^2$), concluímos imediatamente do teste da comparação (a) que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente e, como consequência, a série iniciada pelo índice $n = 1$ também é convergente. □

Enfatizamos que o teste da comparação não diz o valor da soma da série. Ele ajuda a determinar, nos casos em que pode ser aplicado, se uma série é convergente ou divergente. A título de informação, registramos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,645.$$

Exercício 3.1 Utilize o teste da comparação para mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 2$ e divergente se $0 < p < 1$. □

Exemplo 3.2 A convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(1/n)}{n^2}$ decorre do teste da comparação, pois $0 \leq \frac{\text{sen}(1/n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ para todo inteiro positivo n e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente. □

Exemplo 3.3 Neste exemplo vamos mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(1/n)}{n\sqrt{n}}$ é convergente. Para tanto, a estimativa $0 \leq \text{sen}(\frac{1}{n}) \leq 1$ que utilizamos no exemplo anterior não é suficiente. Realmente, dela obtemos $0 < \frac{\text{sen}(1/n)}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, o que não nos permite concluir nada, pois $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente (veja Exercício 3.1 acima). Entretanto, como $0 < \text{sen}\, x < x$ para todo $x \geq 0$ temos

$$0 \leq \frac{\text{sen}(1/n)}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1/n}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}.$$

Portanto, como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ é convergente (veja Exercício 3.1 novamente), concluímos, via teste da comparação, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(1/n)}{n\sqrt{n}}$ também é convergente. □

O teste da comparação é a base para vários outros critérios de convergência ou divergência de séries, como veremos a seguir.

3.2 Convergência absoluta

Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge absolutamente** ou é **absolutamente convergente** se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente.

Teorema 3.2 *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração do teorema: Da propriedade $0 \leq x + |x| \leq 2|x|$, válida para qualquer número real x, e do teste da comparação aplicado às séries de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (2|a_n|)$ decorre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ é convergente. Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, pois se escreve como a diferença entre duas séries convergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

□

Exemplo 3.4 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^5}$ tem termos positivos e negativos, embora não seja alternada. Mas, como $|\operatorname{sen} n| \leq 1$ para todo n, temos

$$\left|\frac{\operatorname{sen} n}{n^5}\right| = \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^5} \leq \frac{1}{n^5}.$$

Logo, aplicando o teste da comparação entre a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} n}{n^5}\right|$ e a série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ (veja Exercício 3.1), deduzimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^5}$ é absolutamente convergente. □

A recíproca do teorema acima não é verdadeira. Por exemplo, a série harmônica alternada é convergente, mas não é absolutamente convergente, uma vez que $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **condicionalmente convergente** se ela é convergente mas não é absolutamente convergente, como ocorre com a série harmônica alternada.

3.3 O teste da razão

Este teste, quando pode ser aplicado, funciona como um critério para convergência ou divergência de uma série.

Teorema 3.3 *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos* ***não nulos*** *tal que* $L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ ***exista ou seja infinito*** *(isto é,* $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$*).*

(a) Se $L < 1$*, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é* ***absolutamente convergente*** *(e, portanto, convergente).*

(b) Se $L > 1$ *ou* $L = +\infty$*, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

(c) Se $L = 1$*, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *pode ser convergente ou divergente. Isto é, o teste da razão é inconclusivo se* $L = 1$*.*

Demonstração do teorema: Antes de demonstrarmos o item (a), enfatizamos que, se o limite L existir, ele não pode ser um número negativo, uma vez que os termos da sequência $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ são positivos.

(a) Como $0 \leq L < 1$, podemos escolher um número positivo r tal que $L < r < 1$. Consideremos, agora, o intervalo $J = (L-1, r)$. Este intervalo, obviamente, contém o número L. Como L é o limite da sequência $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$, sabemos que todos os termos dessa sequência que possuem ordem maior do que uma ordem N estão no intervalo J. Portanto,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \text{ para todo } n > N.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|a_{N+2}| &< r\,|a_{N+1}| \\
|a_{N+3}| &< r\,|a_{N+2}| < r^2\,|a_{N+1}| \\
|a_{N+4}| &< r\,|a_{N+3}| < r^3\,|a_{N+1}| \\
&\vdots \\
|a_n| &< \frac{|a_{N+1}|}{r^{N+1}} r^n \quad \text{para todo } n > N+1.
\end{aligned}$$

Daí, para concluírmos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente utilizando o teste da comparação, basta verificarmos que a série

$$\sum_{n=N+2}^{\infty} \left(\frac{|a_{N+1}|}{r^{N+1}} r^n\right)$$

é convergente. Mas essa série é, na verdade, uma constante positiva C multiplicada pela série geométrica de razão r iniciada pelo índice $N+2$:

$$\sum_{n=N+2}^{\infty}\left(\frac{|a_{N+1}|}{r^{N+1}}r^n\right)=\frac{|a_{N+1}|}{r^{N+1}}\sum_{n=N+2}^{\infty}r^n=C\sum_{n=N+2}^{\infty}r^n.$$

(Note que $C=\frac{|a_{N+1}|}{r^{N+1}}$ é realmente uma constante, pois não depende do índice n do somatório. Assim, essa constante pôde "sair" do somatório.)

Por fim, como a série geométrica acima é convergente (pois sua razão satisfaz $0<r<1$), concluímos do teste da comparação que a série $\sum_{n=N+2}^{\infty}|a_n|$ é convergente, o mesmo ocorrendo, portanto, com a série $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

(b) Seja r um número tal que $1<r<L$. Se $L>1$, então existe uma ordem N tal que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\in(r,L+1)$ para todo $n>N$. Se $L=+\infty$, então existe uma ordem, que também denotaremos por N, tal que todos os termos da sequência $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ que posuem ordem maior do que N ultrapassam o valor r.

Logo, em ambas as situações podemos concluir que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>r \text{ para todo } n>N.$$

Assim, procedendo como na demonstração do item (a), encontramos

$$|a_n|>Cr^n \text{ para todo } n>N+1,$$

em que $C=\frac{|a_{N+1}|}{r^{N+1}}$. Uma vez que $r>1$, acabamos de concluir que

$$|a_n|>C>0 \text{ para todo } n>N+1,$$

o que significa que $\lim|a_n|\neq 0$. Consequentemente, conforme o teste de divergência 2.3, $\sum_{n=N+2}^{\infty}a_n$ é divergente.

(c) Para provarmos este item, devemos exibir uma série absolutamente convergente tal que $L=1$ e outra série divergente tal que $L=1$.

A série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ é convergente e a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ é divergente. Além disso,

$$\lim\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right|=\lim\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=\left(\frac{1}{1+\lim\frac{1}{n}}\right)^2=1$$

e

$$\lim\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right|=\lim\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\lim\frac{1}{n}}=1.$$

Portanto, quando $L=1$ não podemos concluir nada a partir do teste da razão. □

Exemplo 3.5 Vamos verificar se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ é convergente ou divergente, aplicando o teste da razão. Temos

$$L = \lim \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\lim \frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Como $L < 1$, a série deste exemplo é convergente. □

Nota 3.1 A convergência de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pode servir para mostrar que $\lim a_n = 0$, conforme Teorema 2.2. Assim, da convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ mostrada no exemplo acima, podemos concluir que $\lim \frac{n^2}{2^n} = 0$.

Exemplo 3.6 Para a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ temos

$$\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n (n+1)}{n^n} \frac{n!}{(n+1)\, n!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Como

$$L = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1,$$

concluímos do teste da razão que a série deste exemplo é divergente.[1] □

Exemplo 3.7 Para a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ temos

$$L = \lim \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}} = \lim \frac{(n+1)!}{n!} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim(n+1) = +\infty.$$

Como $L = +\infty$, concluímos do teste da razão que a série deste exemplo é divergente. □

[1] Se você não se lembra deste limite notável (que pode ser utilizado como a definição do número e), calcule-o da seguinte forma: se $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, então $y = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$. Daí, como

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{z\to 0+} \frac{\ln(1+z)}{z} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{z\to 0+} \frac{1}{1+z} = 1,$$

tem-se

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e.$$

3.4 O teste da integral

O teste da integral, a ser apresentado em seguida, também fornece critérios para determinação da convergência ou divergência de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de termos positivos. Entretanto, para utilizarmos esse teste é necessário que identifiquemos uma função **positiva** e **decrescente** $f : [N+1, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $a_n = f(n)$ para todo $n > N$ e que saibamos se a integral imprópria $\int_N^{\infty} f(x)\, dx$ é convergente ou divergente. Na prática, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente se, e somente se, a integral $\int_N^{\infty} f(x)\, dx$ o for. (Isto significa, portanto, que a série será divergente se a integral imprópria o for.)

Teorema 3.4 *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos tal que $a_n = f(n)$ para todo $n > N$ em que $f : [N+1, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função positiva e decrescente.*

(a) *Se a integral imprópria $\int_{N+1}^{\infty} f(x)\, dx$ for convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será convergente.*

(b) *Se a integral imprópria $\int_{N+1}^{\infty} f(x)\, dx$ for divergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será divergente.*

Demonstração do teorema: Para provar o item (a) vamos utilizar o seguinte fato: para todo inteiro $k \geq 1$ as somas parciais

$$a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots + a_{N+k} = \sum_{n=N+2}^{n=N+k} a_n \tag{3.1}$$

são limitadas superiormente pelas integrais $\int_{N+1}^{N+k} f(x)dx$, isto é,

$$\sum_{n=N+2}^{n=N+k} a_n < \int_{N+1}^{N+k} f(x)dx. \tag{3.2}$$

Este fato está ilustrado na Figura 3.1, a seguir.
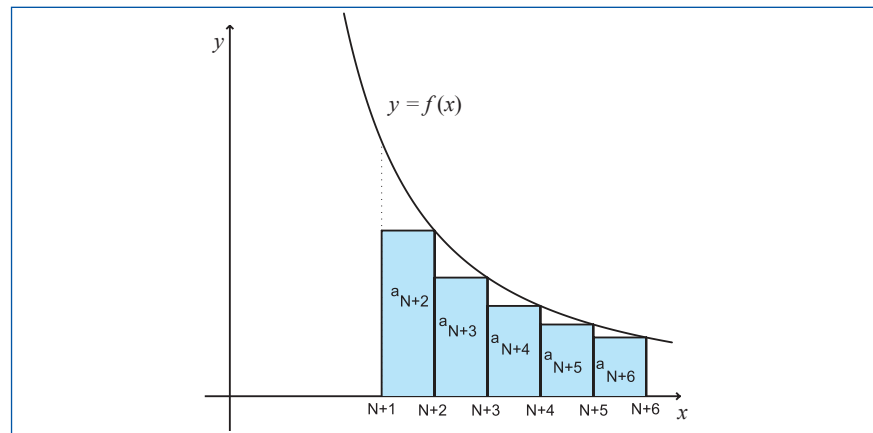
Figura 3.1 - As somas parciais são limitadas superiormente pela integral $\int_{N+1}^{N+k} f(x)dx$

É que a área em cinza é dada pela soma parcial em 3.2, enquanto que a área abaixo do gráfico de $y = f(x)$ e acima do intervalo $[N+1, N+k]$ é dada pela integral em 3.2.

Portanto, se a integral imprópria $\int_{N+1}^{\infty} f(x)\, dx$ for convergente, então

$$\int_{N+1}^{N+k} f(x)dx \leq S = \int_{N+1}^{\infty} f(x)\, dx.$$

Nesse caso, a sequência de somas parciais (3.1) também será limitada pela constante S. Como essa sequência é crescente (lembre-se de que os termos a_n são positivos), podemos concluir que ela é convergente e que, por definição, o seu limite é o valor da série que ela representa, ou seja,

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=N+2}^{n=N+k} a_n = \sum_{n=N+2}^{\infty} a_n.$$

Daí decorre que a série $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ é convergente, o que encerra a demonstração do item (a).

A prova do item (b) segue procedimento análogo. Conforme ilustrado abaixo, na Figura 3.2, a área em cinza $(a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots + a_{N+k})$ é maior do que a área abaixo do gráfico de $y = f(x)$, isto é,

$$\sum_{n=N+1}^{n=N+k} a_n > \int_{N+1}^{N+k} f(x)dx \tag{3.3}$$
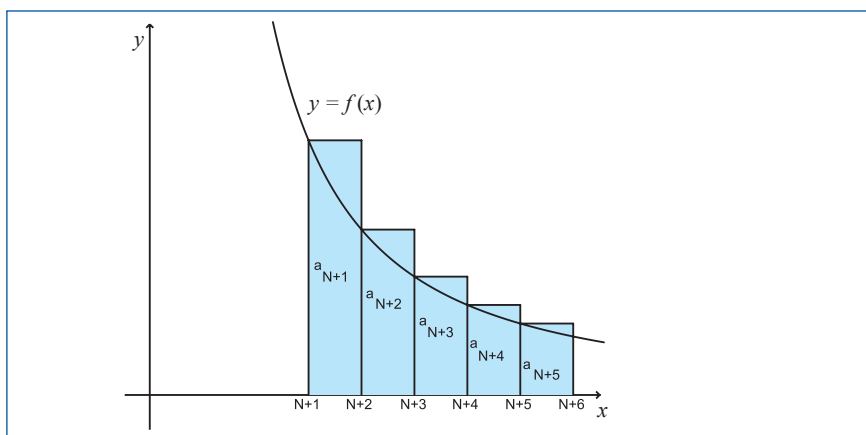
Figura 3.2 - As somas parciais são limitadas inferiormente pela integral $\int_{N+1}^{N+k} f(x)dx$

Portanto, se a integral imprópria $\int_{N+1}^{\infty} f(x)dx$ diverge, então as somas parciais acima formam uma sequência crescente e ilimitada, uma vez que $\int_{N+1}^{\infty} f(x)dx = +\infty$. Logo, podemos concluir que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = +\infty,$$

ou seja, que essa série é divergente.

□

É interessante realçar que a demonstração desse teorema nos permite dar uma estimativa para o valor de uma série convergente que se enquadra na situação descrita no item (a). De fato, decorre de (3.2) e (3.3) que

$$\int_{N+1}^{N+k} f(x)dx < \sum_{n=N+1}^{n=N+k} a_n = a_{N+1} + \sum_{n=N+2}^{n=N+k} a_n < a_{N+1} + \int_{N+1}^{N+k} f(x)dx.$$

Então, fazendo $k \to \infty$ nessas desigualdades encontramos

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leq a_{N+1} + \int_{N+1}^{\infty} f(x)dx. \tag{3.4}$$

Já vimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, conhecida como p-**harmônica**, é divergente se $0 < p \leq 1$ e convergente se $p \geq 2$. Vamos, no próximo exemplo, utilizar o teste da integral para recuperar estes fatos, bem como para mostrar que a série p-harmônica é convergente também para $1 < p < 2$.

Exemplo 3.8 A função $f(x) = \frac{1}{x^p}$ é decrescente se o expoente p é positivo, uma vez que $f'(x) = -px^{-p-1} = -\frac{p}{x^{p+1}} < 0$ para todo $x \geq 1$. Como os termos da série p-harmônica são dados por $f(n)$, podemos utilizar o teste da integral para estudar a convergência da série p-harmônica para $p > 1$.

Se $0 < p < 1$, então a série p-harmônica diverge, pois

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx &= \lim_{M\to\infty} \int_1^M x^{-p}dx \\ &= \lim_{M\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_{x=1}^{x=M} = \lim_{M\to\infty} \frac{M^{-p+1}-1}{-p+1} = +\infty.\end{aligned}$$

Se $p = 1$, então temos outra maneira de mostrar que a série harmônica é divergente, pois

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{1}{x}dx = \lim_{M\to\infty} \ln M = +\infty.$$

Se $p > 1$, então a série p-harmônica converge, pois

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx &= \lim_{M\to\infty} \int_1^M x^{-p}dx \\ &= \lim_{M\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_{x=1}^{x=M} \\ &= \frac{1}{p-1} \lim_{M\to\infty} \left(1 - \frac{1}{M^{p-1}}\right) = \frac{1}{p-1}.\end{aligned}$$

□

No caso em que $p > 1$, embora saibamos que a série p-harmônica é convergente, não sabemos o valor de sua soma. Entretanto, de (3.4) temos as seguintes estimativas:[2]

$$\frac{1}{p-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq \frac{p}{p-1}.$$

[2] Uma vez que

$$a_1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = = 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}.$$

Por exemplo, no caso em que $p = 2$ já havíamos antecipado que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,645$. A estimativa acima nos diz que

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2.$$

Exemplo 3.9 Vamos mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ é convergente utilizando o teste da integral. Inicialmente, vamos verificar que a função $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ é decrescente para todo x maior do que um inteiro N. Calculando sua derivada encontramos

$$f'(x) = \frac{x^2 \frac{1}{x} - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

O único ponto crítico de f é x_0 dado por $\ln x_0 = \frac{1}{2}$. Assim, se $x > x_0$ então $\ln x > \ln x_0 = \frac{1}{2}$. Logo, $\frac{1}{2} < \ln x$ se $x > x_0$, o que significa que o numerador da expressão de $f'(x)$ é negativo para $x > x_0$. Como o denominador dessa expressão é sempre positivo (para $x > 0$), concluímos que $f'(x) < 0$ para todo $x > x_0$. Assim, se N é qualquer inteiro maior do que x_0, então podemos concluir que $f(x)$ é decrescente para todo $x > N$. Calculando, a primitiva de f por meio da mudança de variável $y = \ln x$ encontramos, depois de uma integração por partes:[3]

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^2} dx &= \int y e^{-y} du \\ &= y\left(-e^{-y}\right) - \int \left(-e^{-y}\right) dy = -ye^{-y} - e^{-y} = -\frac{1}{x}(\ln x + 1). \end{aligned}$$

Por fim, podemos concluir que a integral imprópria $\int_N^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ é convergente, pois

$$\begin{aligned} \int_N^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx &= \lim_{M \to \infty} \left[-\frac{1}{x}(\ln x + 1) \right]_{x=N}^{x=M} \\ &= \frac{1}{N}(\ln N + 1) - \lim_{M \to \infty} \frac{1}{M}(\ln M + 1) = \frac{1}{N}(\ln N + 1), \end{aligned}$$

uma vez que (por L'Hôpital)

$$\lim_{M \to \infty} \frac{1}{M}(\ln M + 1) = \lim_{M \to \infty} \frac{\frac{1}{M}}{1} = 0.$$

Consequentemente, o teste da integral nos diz que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ é convergente. □

[3] $\int u dv = uv - \int v du$ (fizemos $u = y$ e $v = e^{-y}$).

Exemplo 3.10 Vamos utilizar o teste da integral para mostrar que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ é divergente. Precisamos analisar a função $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ para $x \geq 2$ (note que $f(x) > 0$ para todo $x \geq 2$). Inicialmente vamos verificar que essa função é decrescente. Para tanto é suficiente mostrarmos que $x \ln x$ é uma função crescente. Mas isto é claro, pois $(x \ln x)' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1 > 0$ para todo $x \geq 2$.

Para finalizar, vamos mostrar que a integral diverge. Fazendo a substituição $u = \ln x$ temos

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx &= \lim_{M \to \infty} \int_2^{M} \frac{1}{x \ln x} dx \\
&= \lim_{M \to \infty} \int_{\ln 2}^{\ln M} \frac{1}{u} du \\
&= \lim_{M \to \infty} \ln(\ln M - \ln 2) = \lim_{M \to \infty} \ln\left(\ln \frac{M}{2}\right) = +\infty.
\end{aligned}$$

□

Exercícios

1. Encontre **todos** os valores de x para os quais a série seja convergente.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{5^n \sqrt{n}}$.

2. Determine se a série é convergente ou divergente:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{\sqrt{n}}$.

   (b) $\sum_{n=3}^{\infty} (\frac{n}{3})^n \frac{1}{n!}$.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(\frac{1}{n})}{n}$.

   (d) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(2+\ln n)}$.

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{\pi}{2n^2-1})$.

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{3n+1}}$.

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^2}$.

3. Determine se as séries convergem absolutamente, condicionalmente ou se divergem:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(\ln n+3)^n}$.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+4)^{0,8}}$.

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+4}{n^2+n}$.

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$.

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{n^2+1}$. (Lembrete: $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{x^2+1}$.)

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n}{n^2}$.

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln(n^{\frac{1}{n}})$.

4. Seja (a_n) uma sequência tal que $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$. Podemos dizer que essa sequência converge? Se converge, qual deve ser o seu limite?

5. Seja (a_n) a sequência definida por: $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = \dfrac{3 + \cos(n^2)}{n} a_n$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente ou divergente? Justifique.

6. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\ln n)^2}{n^3}$ é convergente ou divergente? (Sugestão: use o teste da comparação com uma série p-harmônica adequada.)

AULA 4

Séries de potências

OBJETIVOS

- Apresentar a série de potências como uma função.
- Definir e calcular o raio e o intervalo de convergência de uma série de potências.
- Explorar as propriedades de derivação de séries de potências.
- Deduzir uma fórmula para os coeficientes de uma série de potências.
- Deduzir uma expressão em séries de potências para a função e^x.
- Deduzir que as séries de potências podem ser integradas termo a termo.
- Deduzir uma expressão em séries de potências para a função $\ln x$.

4.1 Série de potências de x

Uma **série de potências** de x é uma expressão da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots . \tag{4.1}$$

As constantes $a_0, a_1, a_2, \cdots$ que aparecem nesta expressão são os coeficientes da série de potências.

Podemos entender uma série de potências como a generalização de uma função polinomial, mas com infinitos termos. Evidentemente, uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é, para cada valor de x fixado, uma série numérica cuja sequência $(S_N(x))$ de somas parcias correspondente é

$$\begin{aligned} S_N(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_N x^N \\ &= \sum_{n=0}^{N} a_n x^n. \end{aligned}$$

Naturalmente, os valores de x para os quais $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ faz sentido são aqueles para os quais essa série é convergente.

Então, para cada um desses valores de x podemos associar o número

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Essa associação define a função

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \end{aligned} \tag{4.2}$$

cujo domínio D, isto é, o conjunto dos valores de $x \in \mathbb{R}$ que tornam a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergente, devemos descobrir.

Um exemplo em que tal função pode ser explicitada vem da série geométrica de razão x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots .$$

Esta série, como vimos, tem soma $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ para os valores de x restritos ao intervalo $D = (-1, 1)$ e é divergente para os outros valores de x. Ou seja,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ \text{ para } x \in (-1, 1).$$

Explorando ainda este exemplo, se trocarmos x por $(-x^2)$ na expressão acima, descobrimos que a função $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ representa a série alternada de potências pares $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, pois

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n \\ &= 1 + \left(-x^2\right) + \left(-x^2\right)^2 + \left(-x^2\right)^3 + \cdots \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \end{aligned}$$

também para $x \in D = (-1, 1)$.

Na Figura 4.1, a seguir, estão os gráficos das somas parciais $S_5(x)$, $S_{10}(x)$, $S_{15}(x)$ e $S_{20}(x)$ da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, bem como a soma desta série, a função $\frac{1}{1+x^2}$ para $x \in (-1, 1)$.
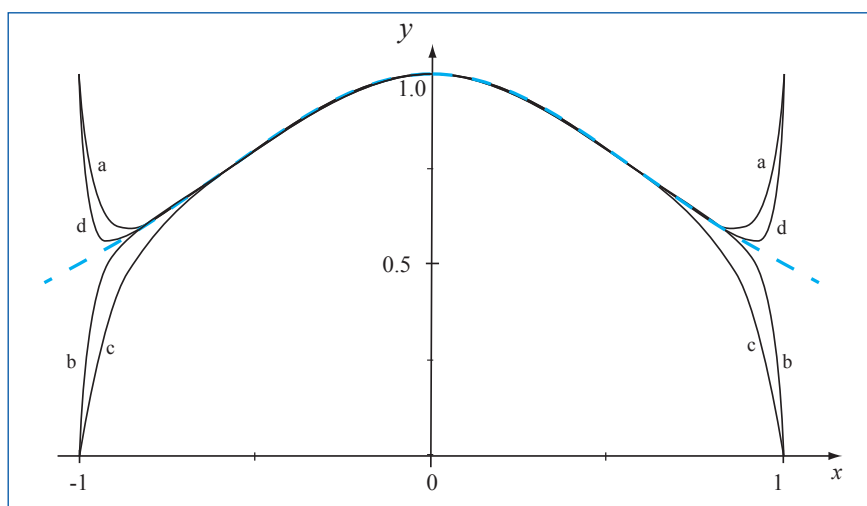
Figura 4.1 - As somas parciais de ordens 5 (c), 10 (a), 15 (b) e 20 (d) e a função limite $\frac{1}{1+x^2}$ (tracejado)

4.2 Raio e intervalo de convergência

Voltemos à função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a fim de determinarmos o seu domínio D. Esse domínio pode ser, em princípio, um intervalo como no caso da série geométrica de razão x. Certamente, D deve conter $x = 0$, uma vez que a sequência das somas parciais $(S_N(0))$ é constante e igual a a_0, o que significa que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é convergente quando $x = 0$ e que $f(0) = a_0$.
Para descobrir mais valores de x que podem pertencer ao domínio D da função f utilizamos o teste da razão para a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Esse teste se baseia no limite

$$\lim \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

e, aplicando-o, concluímos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é:

- absolutamente convergente se $|x| \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$
- divergente se $|x| \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ ou se $|x| \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$.

Vemos, portanto, que valores de x para os quais a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge estão relacionados ao limite

$$L = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|. \tag{4.3}$$

Os dois teoremas seguintes nos dizem como encontrar tais valores de x quando o limite anterior existe.

Teorema 4.1 *Se $L > 0$, então a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é*

(a) absolutamente convergente se $x \in (-\frac{1}{L}, \frac{1}{L})$ e

(b) divergente se $x < -\frac{1}{L}$ ou $x > \frac{1}{L}$.

Demonstração do teorema: (a) Se $x \in (-\frac{1}{L}, \frac{1}{L})$, então $|x| < \frac{1}{L}$ e, como $L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, temos $|x| \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Portanto, conforme vimos acima, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente.

(b) Se $x < -\frac{1}{L}$ ou $x > \frac{1}{L}$, então $|x| > \frac{1}{L}$. Logo, $|x| \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ e aplicando o teste da razão concluímos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é divergente. □

Ainda no caso $L > 0$: nada podemos concluir, em princípio, sobre a convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para $x = -\frac{1}{L}$ e para $x = \frac{1}{L}$. Em geral, devemos estudar separadamente as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(-\frac{1}{L}\right)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{L}\right)^n$ a fim de encontrarmos argumentos adequados para determinar a convergência ou divergência delas.

Teorema 4.2 *Se $L = 0$, então a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração do teorema: Neste caso, independentemente do valor de x, temos trivialmente que $|x| \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, uma vez que $|x| \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \ 0 = 0$. Assim, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. □

O próximo teorema trata do caso $L = +\infty$.

Teorema 4.3 *Se $L = +\infty$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é divergente para todo $x \neq 0$.*

Demonstração do teorema: Se $x \neq 0$, então $|x| \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, uma vez que $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$. Sendo assim, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é divergente para tais valores de x. □

Definição 4.1 *O **raio de convergência** R de uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é definido, de acordo com o limite $L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, da seguinte forma:*

$$R = \begin{cases} 1/L & \text{se } L > 0 \\ +\infty & \text{se } L = 0 \\ 0 & \text{se } L = +\infty. \end{cases}$$

Nota 4.1 Decorre desta definição e dos dois primeiros teoremas acima, que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente no intervalo $(-R, R)$ quando $R > 0$ ou quando $R = +\infty$ (nesse caso a notação $(-\infty, +\infty)$ indica, obviamente, toda a reta numérica).

Definição 4.2 *O* ***Intervalo de Convergência*** *de uma série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *é o domínio D da função (4.2), isto é, o conjunto de todos os valores de x para os quais a série de potências é convergente.*[1] *Assim, de acordo com os teoremas anteriores:*

- *se* $R > 0$*, então D é um dos intervalos*[2]

$$[-R, R]\,,\ \ [-R, R),\ \ (-R, R]\ \ ou\ \ (-R, R)\,;$$

- *se* $R = +\infty$*, então* $D = (-\infty, +\infty)$*, isto é,* $D = \mathbb{R}$*;*
- *se* $R = 0$*, então* $D = \{0\}$.

Exemplo 4.1 Vamos determinar o raio de convergência R e o intervalo de convergência D da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Para tanto, calculamos

$$L = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{n!}{(n+1)\,n!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0.$$

Logo, $R = +\infty$ e $D = (-\infty, +\infty)$. □

Decorre desse exemplo que a função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é definida para todos os valores de x. Veremos, mais adiante, que esta é a função exponencial, isto é, que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Exemplo 4.2 Para a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$, que pode ser reescrita como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n} x^n$, encontramos

$$L = \lim \frac{\dfrac{1}{2^{n+1}\,(n+1)}}{\dfrac{1}{2^n n}} = \lim \frac{2^n n}{2^{n+1}\,(n+1)} = \lim \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2},$$

o que nos permite concluir que $R = 2$. Para definirmos o intervalo de convergência D devemos estudar os casos em que $x = -2$ e $x = 2$. Para o primeiro temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n}(-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

[1] Lembre-se: se uma série é absolutamente convergente, então ela é convergente.

[2] Uma vez que $(-R, R)$ sempre faz parte de D, para definir qual dos quatro intervalos é o intervalo de convergência, devemos estudar as séries numéricas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

que é convergente, pois é a série harmônica alternada. Para o segundo caso temos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n} (2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que é divergente, uma vez que é a série harmônica. Portanto, o intervalo de convergência para a série deste exemplo é $D = [-2, 2)$. □

Exemplo 4.3 Para a série $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ temos $R = 0$ e $D = \{0\}$, uma vez que

$$L = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim(n+1) = +\infty.$$

□

Como mencionamos anteriormente, uma série de potências de x é sempre convergente em $x = 0$. Notamos, também, que $x = 0$ é sempre o centro do intervalo de convergência. A seguir, vamos estender as propriedades acima para séries de potências de $x - x_0$.

4.3 Série de potências de $(x - x_0)$

Se, para algum número x_0 fixado, trocarmos x por $x - x_0$ na expressão (4.1) que define a série de potências de x, obtemos a seguinte **série de potências de** $(x - x_0)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \cdots . \tag{4.4}$$

A soma desta série é o limite (caso exista)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \lim S_N (x),$$

em que $(S_N (x))$ denota a sequência de somas parciais:

$$S_N (x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \cdots + a_N (x - x_0)^N .$$

Naturalmente, as propriedades de uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ relacionadas a $x = 0$ se transferem para a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, mas ficam relacionadas a $x = x_0$.

Assim, a série de potências de $(x - x_0)$ é sempre convergente quando $x = x_0$ e sua soma é a_0, uma vez que $S_N (x_0) = a_0$ para todo N.

Além disso, podemos definir a função

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \end{aligned}$$

cujo domínio D (o intervalo de convergência) é centrado em $x = x_0$, conforme veremos a seguir.

Exemplo 4.4 Trocando x por $x-2$ na seguinte expressão (da série geométrica de razão x):

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ válida para } x \in (-1,1),$$

encontramos uma série de potências de $(x-2)$ e sua soma:

$$\frac{1}{3-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n, \text{ válida para } x \in (1,3).$$

□

Exercício 4.1 Utilize a expressão da série geométrica para encontrar uma representação em série de potências de $(x+1)$ para a função $f(x) = \frac{1}{x}$. □

O raio de convergência R da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ é definido de acordo com o limite $L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ da mesma forma como antes:

$$R = \begin{cases} 1/L & \text{se } L \neq 0 \\ +\infty & \text{se } L = 0 \\ 0 & \text{se } L = +\infty. \end{cases}$$

Além disso, nos casos em que $R > 0$ ou $R = +\infty$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ é absolutamente convergente se $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. (Para o caso em que $R = +\infty$ entendemos que $(x_0 - \infty, x_0 + \infty) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.)

O intervalo de convergência D é obtido como na Definiçao 4.2, mas com o seu centro deslocado de $x = 0$ para $x = x_0$. Ou seja:

- se $R > 0$, então D é um dos intervalos

  $[x_0 - R, x_0 + R]$, $[x_0 - R, x_0 + R)$, $(x_0 - R, x_0 + R]$ ou $(x_0 - R, x_0 + R)$;

- se $R = +\infty$, então $D = (-\infty, +\infty)$, isto é, $D = \mathbb{R}$;
- se $R = 0$, então $D = \{x_0\}$.

Nota 4.2 É comum a expressão **série de potências em torno de x_0 ou centrada em x_0** como referência a uma série de potências de $(x - x_0)$.

Exemplo 4.5 Podemos verificar que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{\sqrt{n+1}}$, depois de ser reescrita como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \left(x - \frac{3}{2}\right)^n}{\sqrt{n+1}}$, é uma série de potências centrada em $x_0 = \frac{3}{2}$. Para esta série temos

$$L = \lim \frac{2^{n+1}\sqrt{n+1}}{2^n \sqrt{n+2}} = 2\sqrt{\lim \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}} = 2.$$

Daí segue que o raio de convergência desta série é $R = \dfrac{1}{2}$ e que ela converge absolutamente no intervalo $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) = (1, 2)$. Para definirmos o intervalo de convergência da série devemos estudar a convergência para os casos $x = 1$ e $x = 2$.

Para $x = 1$ temos a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ que é convergente, uma vez que cumpre as condições para a aplicabilidade do teste das séries alternadas: $\lim \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ é decrescente.

Para $x = 2$ temos a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ que é divergente, pois é uma série p-harmônica[3] para $p = \frac{1}{2} < 1$.

Portanto, o intervalo de convergência da série de potências deste exemplo é $[1, 2)$. □

4.4 Derivação termo a termo

Nesta seção vamos explorar as propriedades de diferenciabilidade da função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{4.5}$$

definida por uma série de potências centrada em x_0, cujo raio de convergência é $R > 0$ ou $R = +\infty$. Vamos restringir o domínio dessa função ao intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ no qual, seguramente, a série é (absolutamente) convergente. O caso em que $R = 0$ não tem interesse, uma vez que a série é convergente somente em $x = x_0$.

De imediato vamos enunciar o seguinte teorema, cuja demonstração requer construções que estão um pouco além dos propósitos deste texto.

Teorema 4.4 *A função $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ definida por (4.5) é diferenciável e sua derivada é dada pela série de potências centrada em x_0 obtida da série (4.5) por derivação termo a termo, isto é,*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}. \tag{4.6}$$

Além disso, as séries de potências de f e de f' possuem o mesmo raio de convergência R.

A propriedade (4.6) diz que podemos derivar a série de potências (4.5) como se ela fosse um polinômio, isto é, podemos derivar cada um de seus termos, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [a_0]' + [a_1 (x - x_0)]' + \left[a_2 (x - x_0)^2\right]' + \left[a_3 (x - x_0)^3\right]' + \cdots \\ &= 0 + a_1 + 2a_2 (x - x_0) + 3a_3 (x - x_0)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \end{aligned}$$

de modo que a série resultante também é uma série de potências centrada em x_0 que converge (absolutamente) em cada $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ e cuja soma é a derivada $f'(x)$.

[3] Note que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n-1=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

Note que o índice inicial da série expressa por $f'(x)$ é $n = 1$ (porque a derivada de a_0 é zero). Entretanto, se desejarmos, podemos escrever

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n (x - x_0)^{n-1} \\ &= \sum_{n+1=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^{n+1-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^{n} . \end{aligned}$$

É fácil demonstrar a parte do teorema que diz que o raio de convergência da série em (4.6) também é R. De fato, temos

$$L = \lim \frac{(n+1) a_{n+1}}{na_n} = \lim \frac{n+1}{n} \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{R},$$

uma vez que o raio de convergência da série (4.5) é o inverso do limite $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Outra propriedade interessante, decorrente do teorema acima, é a **continuidade** da função $f(x)$ no intervalo $(-R, R)$, uma vez que essa função é derivável nesse intervalo.

Mais interessante é que a aplicação sucessiva desse teorema nos diz que $f(x)$ possui derivadas de qualquer ordem e que elas são representadas por séries de potências centradas em x_0 e com o mesmo raio de convergência R. Isso ocorre de tal maneira que a k-ésima derivada $f^{(k)}(x)$ pode ser obtida por derivação termo a termo da série de potências que representa a derivada $f^{(k-1)}(x)$.

Realmente, temos

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[na_n (x - x_0)^{n-1} \right]' \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n (n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x - x_0)^{n} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \left[n (n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} \right]' \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} n (n-1)(n-2) a_n (x - x_0)^{n-3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1) a_{n+3} (x - x_0)^{n} \end{aligned}$$

$e, mais geralmente,$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n (n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} (n+k)(n+k-1) \cdots (n+1) a_{n+k} (x - x_0)^{n} . \end{aligned}$$

Além disso, decorre imediatamente dessas expressões que

$$f(x_0) = a_0, \;\; f'(x_0) = a_1, \;\; f''(x_0) = 2!a_2, \;\; f'''(x_0) = 3!a_3, \cdots$$

ou, em uma notação compacta:

$$f^{(k)}(x_0) = k!a_k \text{ para todo } k \geq 0. \tag{4.7}$$

Exemplo 4.6 Já vimos que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots, \text{ se } x \in (-1,1). \tag{4.8}$$

Do teorema anterior podemos deduzir que

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \text{ se } x \in (-1,1),$$

ou seja, que

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots, \text{ se } x \in (-1,1).\end{aligned}$$

Também podemos deduzir que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1-x}\right)'' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right)' \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, x^{n-2}, \text{ se } x \in (-1,1),\end{aligned}$$

isto é, que

$$\begin{aligned}\frac{2}{(1-x)^3} &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(n+1)\, x^n \\ &= 2 + 6x + 12x^2 + \cdots, \text{ se } x \in (-1,1).\end{aligned}$$

□

4.4.1 Representação de e^x em série de potências

Como uma aplicação do Teorema 4.4 vamos mostrar que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Primeiramente vamos nos convencer de que a série acima deve ser mesmo uma candidata natural para representar a função e^x. O argumento chave é a expressão para os coeficientes de uma série de potências que deduzimos em (4.7).

Assim, se e^x for a soma de uma série de potências de x, isto é, se

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{4.10}$$

então, de acordo com (4.7), os coeficientes a_n devem se relacionar com e^x e com as derivadas dessa função, do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
[e^x]_{x=0} &= a_0 \\
\left[(e^x)'\right]_{x=0} &= a_1 \\
\left[(e^x)''\right]_{x=0} &= 2!a_2 \\
\left[(e^x)'''\right]_{x=0} &= 3!a_3 \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
\left[(e^x)^{(n)}\right]_{x=0} &= n!a_n.
\end{aligned}$$

Porém, como a função e^x e todas as suas derivadas valem 1 quando $x = 0$, devemos obter, das igualdades acima,

$$a_0 = 1, \;\; a_1 = 1, \;\; a_2 = \frac{1}{2!}, \;\; a_3 = \frac{1}{3!}, \ldots, \;\; a_n = \frac{1}{n!},$$

ou seja,

$$a_n = \frac{1}{n!} \;\text{ para todo } n \geq 0.$$

Daí, ao substituírmos essa expressão em (4.10) chegaremos à representação (4.9) para e^x.

A fim de demonstrarmos que essa representação é realmente válida, vamos denotar a série à direita de (4.9) por $E(x)$, ou seja, vamos definir

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \;\; \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Essa série, como já vimos em um exemplo anterior, tem raio de convergência $R = +\infty$. Portanto, podemos calcular sua soma para qualquer valor de x.

Do Teorema 4.4 segue que

$$\begin{aligned}
E'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^n}{n!}\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n+1=1}^{\infty} \frac{x^{n+1-1}}{(n+1-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = E(x), \;\; \text{para todo } x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

ou seja, a derivada de E é a própria função E.

Logo, derivando o produto $E(x)e^{-x}$, encontramos

$$\begin{aligned}
\left(E(x)e^{-x}\right)' &= e^{-x}E'(x) - e^{-x}E(x) \\
&= e^{-x}\left(E'(x) - E(x)\right) = 0, \;\; \text{para todo } x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

o que nos diz que $E(x)e^{-x} = C$ (função constante). Uma vez que $E(0) = e^0 = 1$, concluímos que $C = 1$ e que, portanto,

$$E(x) = e^x, \;\; \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

A Figura 4.2, a seguir, ilustra as aproximações da função e^x por somas parciais da série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
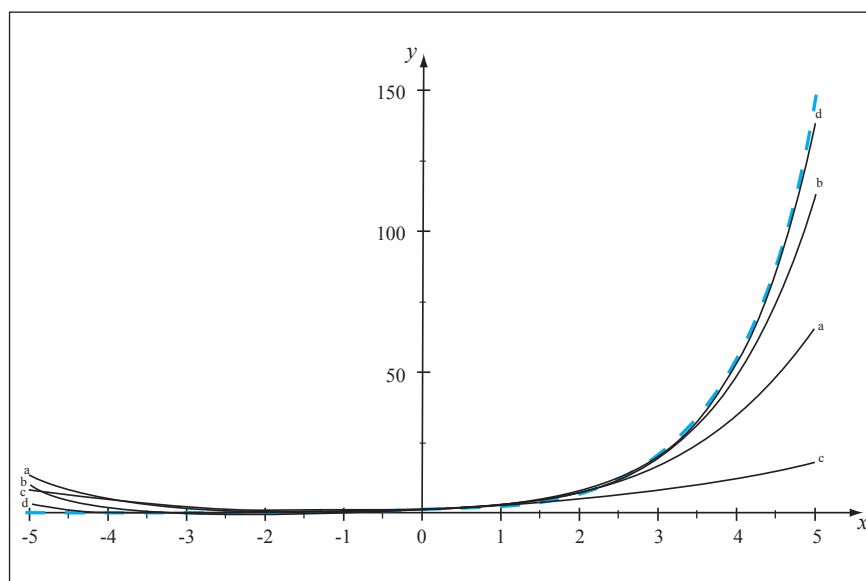
Figura 4.2 -As somas parciais $S_2(x)$ (c), $S_4(x)$ (a), $S_6(x)$ (b) e $S_8(x)$ (d) da série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ e a função limite e^x (tracejado)

Agora, uma curiosidade: fazendo $x = 1$ em (4.9) obtemos uma série numérica cujo valor é número de Euler e:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Calculando a soma parcial de ordem 6 dessa série numérica, obtemos uma aproximação para e:

$$\sum_{n=0}^{n=5} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60} \approx 2,717.$$

Exemplo 4.7 Vamos, neste exemplo, escrever uma representação em série de potências da forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para a função $f(x) = x^3 e^{x^2}$. Em seguida, vamos utilizar essa representação para calcular as derivadas $f^{(9)}(0)$ e $f^{(200)}(0)$. Temos

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 e^{x^2} \\ &= x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} \\ &= x^3 \left(1 + \left(x^2\right) + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \cdots \right) \\ &= x^3 + x^5 + \frac{x^7}{2!} + \frac{x^9}{3!} + \cdots . \end{aligned}$$

Observe que

$$a_0 = a_2 = a_4 = \cdots 0$$

e que

$$a_1 = 0, \ \ a_3 = 1, \ \ a_5 = 1, \ \ a_7 = \frac{1}{2!}, \ \ a_9 = \frac{1}{3!}$$

e, genericamente, os coeficientes de ordem ímpar são dados por

$$a_n = \frac{1}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!} \quad \text{para} \quad n \geq 3.$$

Portanto, a fórmula (4.7) aplicada para $x_0 = 0$ nos diz que $f^{(200)}(0) = 200!a_{200} = 0$ e que

$$f^{(7)}(0) = 7!a_7 = 7!\frac{1}{2!} = 2.520.$$

□

4.5 Integração termo a termo

Outra consequência do Teorema 4.4 é que a série (4.6) também pode ser integrada termo a termo para produzir a integral da função $f(x)$, conforme mostra o seguinte teorema.

Teorema 4.5 *Seja $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ a função dada pela série de potências (4.5). Então,*[4]

$$\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}, \tag{4.11}$$

em que C é uma constante arbitrária.

Além disso, a série em (4.11) tem o mesmo raio de convergência R da série (4.5).

Demonstração do teorema: É fácil ver que a série em (4.11) também tem raio de convergência R, uma vez que

$$\lim \frac{\frac{a_{n+1}}{n+2}}{\frac{a_n}{n+1}} = \lim \frac{n+1}{n+2} \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{R}.$$

Assim, aplicando o Teorema 4.4 à função

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$$

podemos concluir que ela é derivável em $(x_0 - R, x_0 + R)$ e que

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}\right]' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = f(x).$$

Isso significa que $g(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ e que, portanto, a expressão $C + g(x)$ descreve todas as primitivas de $f(x)$ se C é uma constante arbitrária. □

[4] Note a integração termo a termo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n (x - x_0)^n dx.$$

4.5.1 Representação de $\ln x$ em série de potências

Vamos aplicar o Teorema 4.5 para encontrar uma representação em série de potências de $(x-1)$ para a função $\ln x$. Primeiramente, trocando x por $1-x$ em (4.8) obtemos

$$\frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n \text{, para } -1 < 1-x < 1$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n, \text{ para } 0 < x < 2.$$

Daí, aplicando o Teorema 4.5 encontramos

$$\int \frac{1}{x} dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1}, \text{ para } 0 < x < 2.$$

Uma vez que uma primitiva de $\frac{1}{x}$ é $\ln x$, a expressão anterior diz que

$$\ln x = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1}, \text{ para } 0 < x < 2,$$

para alguma constante c.

Escolhendo $x = 1$ nesta última expressão, é fácil ver que a constante c deve ser zero. Assim, conseguimos escrever

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1}, \text{ para } 0 < x < 2.$$

Para referência posterior, vamos reescrever essa representação (trocando n por $n-1$ na série) assim:

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n, \text{ para } 0 < x < 2. \tag{4.12}$$

A soma parcial de ordem 4 para essa série é

$$S_4(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$$

e, calculando-a em $x = \frac{3}{2}$, encontramos

$$\begin{aligned} S_4\left(\frac{3}{2}\right) &= \left(\frac{3}{2}-1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}-1\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}-1\right)^4 \\ &= \frac{77}{192} \approx 0,401. \end{aligned}$$

Se utilizarmos uma calculadora científica vamos encontrar $\ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0,405$. Naturalmente, a precisão melhora se tomarmos somas parciais de maior ordem (experimente!).

A Figura 4.3, a seguir, ilustra as aproximações da função $\ln x$ por somas parciais da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1}. \tag{4.13}$$
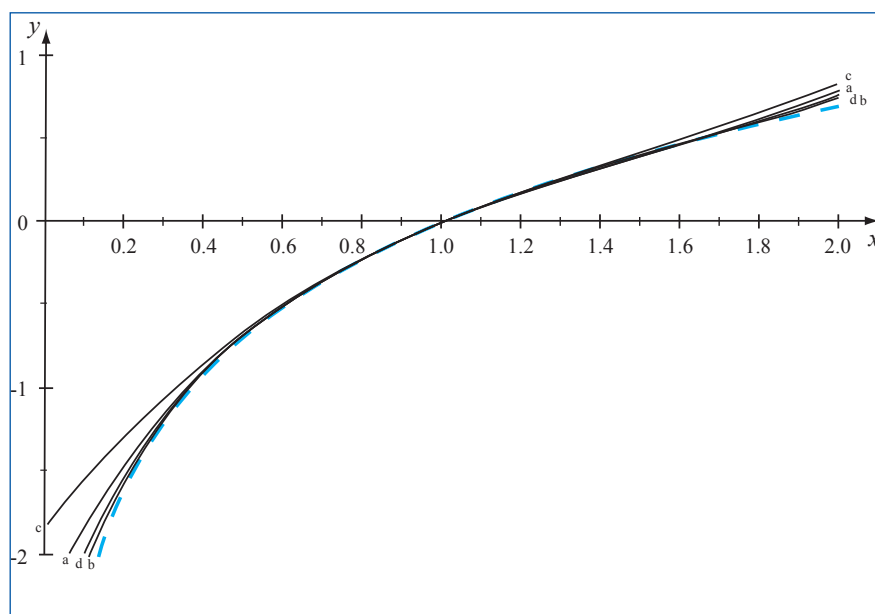
Figura 4.3 - As somas parciais $S_2(x)$ (c), $S_4(x)$ (a), $S_6(x)$ (b) e $S_8(x)$ (d) da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}$ e a função limite $\ln x$ (tracejado)

Exercício 4.2 Encontre uma expressão para $\ln(x+1)$ em séries de potências de x válida para $-1 < x < 1$. (Sugestão: utilize a expressão (4.12) para $\ln x$). □

Exercício 4.3 Encontre uma representação em série de potências para a função $\arctan x$. (Sugestão: integre uma expressão em série para a função $\frac{1}{1+x^2}$.) □

4.5.2 Aproximações para a integral $\int_0^a e^{x^2} dx$

A seguir vamos desenvolver um método para encontrar valores aproximados para a integral $\int_0^a e^{x^2} dx$ em que $a > 0$ é uma constante fixada. Você já deve ter visto, em algum momento de sua vivência em cursos de Cálculo, que uma primitiva da função e^{x^2}, apesar de existir em teoria, não está disponível, na prática, dentre as funções usuais do Cálculo.

Substituindo x por x^2 em (4.9) encontramos

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 4.5 obtemos

$$\begin{aligned} \int e^{x^2} dx &= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\, n!} \\ &= C + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\,(2!)} + \frac{x^7}{7\,(3!)} + \frac{x^9}{9\,(4!)} + \cdots \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\int_0^a e^{x^2} dx = \left[C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\, n!} \right]_{x=0}^{x=a}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)\, n!}$$
$$= a + \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5\,(2!)} + \frac{a^7}{7\,(3!)} + \frac{a^9}{9\,(4!)} + \cdots .$$

Assim, calculando somas parciais

$$S_N\,(a) = a + \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5\,(2!)} + \frac{a^7}{7\,(3!)} + \frac{a^9}{9\,(4!)} + \cdots + \frac{a^{2N+1}}{(2N+1)\, N!}$$

podemos encontrar valores aproximados para a integral $\int_0^a e^{x^2} dx$.

Exemplo 4.8 Utilizando qualquer software matemático que calcule integrais podemos verificar que $\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1{,}463$. Por outro lado, utilizando a soma parcial acima com $N = 4$, encontramos

$$S_4\,(1) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5\,(2!)} + \frac{1}{7\,(3!)} + \frac{1}{9\,(4!)} \approx 1{,}462.$$

□

Exercícios

1. Determine o raio e o intervalo de convergência das seguintes séries de potências:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \ln n}$.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n^2+1}$.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$.

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^n}{3^{n+1}}$.

2. Encontre o domínio da função $f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^n x^n$ e os valores $f(0),\ f(1),\ f'(0)$ e $f'(1)$.

3. Utilize a soma da série geométrica, isto é, a identidade $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, válida se $-1 < x < 1$, para encontrar:

   (a) a representação em série para $f(x) = x \ln(1-x^2)$;

   (b) o raio e o intervalo de convergência da série obtida no item anterior.

4. Encontre uma representação em série de potências de $(x-1)$ para $f(x) = x \ln x$. (Sugestão: note que $x \ln x = (x-1) \ln x + \ln x$.)

5. Encontre uma representação em série de potências de x para $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x}$.

AULA 5

Expansão em série de Taylor

OBJETIVOS

- Definir a série de Taylor de uma função.
- Encontrar as expansões em série de Taylor de algumas funções trigonométricas.
- Definir polinômios de Taylor de uma função.
- Estimar o erro na aproximação de funções por seus polinômios de Taylor.
- Verificar que sen x e cos x são analíticas em $\mathbb{R}$.

5.1 Séries de Taylor e de Maclaurin

Consideremos uma função $f(x)$ que tenha derivadas de todas as ordens em um intervalo aberto em torno de um ponto x_0. Nosso objetivo é encontrar uma série de potências da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ mais adequada, de modo que a identidade

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{5.1}$$

tenha posibilidade de ocorrer para todo x em algum intervalo aberto contendo x_0. Naturalmente, esse intervalo deve ser $(x_0 - R, x_0 + R)$ em que R é o raio de convergência da série.

Já vimos que uma condição necessária para a representação (5.1) acima é que os coeficientes a_n e as derivadas $f^{(n)}(x_0)$ sejam relacionados pela seguinte fórmula:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \text{ para todo } n \geq 0.$$

A substituição de a_n em (5.1), segundo essa fórmula, nos dá a representação mais adequada para $f(x)$:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Note que utilizamos o símbolo $\sim$ em lugar da igualdade porque não sabemos se o limite da série é, realmente, a função $f(x)$. O que sabemos é que se $f(x)$ for o limite de uma série de potências, então tal série deve ser a série acima. Em outras palavras: a série candidata a representar uma função $f(x)$ como em (5.1) é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{5.2}$$

A série de potências (5.2) é denominada a **série de Taylor** da função $f(x)$ em torno de x_0, e no caso particular em que $x_0 = 0$ ela é denominada a **série de Maclaurin** de $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{5.3}$$

Definição 5.1 *Dizemos que uma função $f(x)$ é analítica em x_0 se $f(x)$ coincide com a sua série de Taylor em um intervalo aberto em torno de x_0. Se uma função for analítica em qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$, então dizemos, simplesmente, que esta função é analítica.*

Mostraremos mais adiante que as funções trigonométricas $\cos(x)$ e $\operatorname{sen}(x)$ são analíticas e que as suas séries de Taylor possuem raio de convergência $R = +\infty$. Em particular, elas coincidem com suas séries de Maclaurin, as quais calcularemos a seguir.

5.1.1 Representação de $\operatorname{sen} x$ e de $\cos x$ em série de potências

Para a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ temos $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x = f(x)$ e, daí em diante, as derivadas se repetem, de modo que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{k+1}\cos(x) & \text{se } n = 2k-1 \text{ (ímpar)} \\ (-1)^k \operatorname{sen}(x) & \text{se } n = 2k \text{ (par).} \end{cases} \tag{5.4}$$

Assim,

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ (-1)^{k+1} & \text{se } n \text{ é ímpar da forma } n = 2k-1 \end{cases} \tag{5.5}$$

e, portanto, a série de Maclaurin de $\operatorname{sen}(x)$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}. \tag{5.6}$$

É fácil ver que o raio de convergência desta série é $R = +\infty$, pois

$$\lim \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1-1}}{(2(n+1)-1)!}}{\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}} \right| = \lim \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} = \lim \frac{1}{(2n+1)(2n)} = 0.$$

No final da próxima seção veremos que $\operatorname{sen}(x)$ é analítica. Isso justificará a seguinte representação em série de Maclaurin, válida para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \ x \in \mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Procedendo da mesma maneira que no exemplo anterior, podemos representar $\cos(x)$ por sua série de Maclaurin. Entretanto, utilizando o fato de que $\cos(x)$ é a derivada de $\operatorname{sen}(x)$, chegamos mais facilmente a esta representação derivando a identidade (5.7). Dessa forma (verifique!) encontramos

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \; x \in \mathbb{R}. \tag{5.8}$$

5.2 Fórmula de Taylor

A soma parcial

$$\begin{aligned} P_N(x) &= \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^n \\ &+ \cdots + \frac{f^{(N)}(x_0)}{N!}(x-x_0)^N \end{aligned}$$

da série de Taylor de uma função $f(x)$ é um polinômio (de grau N) denominado **polinômio de Taylor** de grau N da função $f(x)$ em torno de x_0. No caso particular em que $x_0 = 0$, tal polinômio,

$$P_N(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(N)}(0)}{N!}x^N,$$

é denominado polinômio de Maclaurin de grau N da função $f(x)$.

Exemplo 5.1 Uma vez que as derivadas da função exponencial $f(x) = e^x$ são todas iguais à própria função, seu polinômio de Taylor de grau N em torno de x_0 é:

$$\begin{aligned} P_N(x) &= e^{x_0} + e^{x_0}(x-x_0) + \frac{e^{x_0}}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{e^{x_0}}{N!}(x-x_0)^N \\ &= e^{x_0}\left[1 + (x-x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-x_0)^N}{N!}\right] \end{aligned}$$

e seu polinômio de Maclaurin de grau N é

$$P_N(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^N}{N!}.$$

(Veja o gráfico de e^x e de alguns polinômios de Maclaurin desta função na Figura 4.2 do Capítulo 4). □

Exemplo 5.2 Conforme (5.6) os polinômios de Maclaurin de grau N da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ são

$$\begin{aligned} &P_1(x) = 0 + x = x \\ &P_2(x) = 0 + x + \tfrac{0}{2!}x^2 = x = P_1(x) \\ &P_3(x) = 0 + x + \tfrac{0}{2!}x^2 - \tfrac{1}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{3!} \\ &P_4(x) = 0 + x + \tfrac{0}{2!}x^2 - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{0}{4!}x^4 = x - \frac{x^3}{3!} = P_3(x) \\ &P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto, para N ímpar da forma $N = 2k - 1$:

$$P_N(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

e se N é par, então

$$P_N(x) = P_{N-1}(x).$$

(Veja os gráficos da função $\operatorname{sen} x$ e de alguns de seus polinômios de Maclaurin na Figura 5.2, ao final da próxima seção). □

Exercício 5.1 Encontre o polinômio de Maclaurin de grau 3 da função $f(x) = \tan x$. (Veja, na Figura 5.1 a seguir, os gráficos de $\tan x$ e dos polinômios de Maclaurin de graus 3 e 5.) □
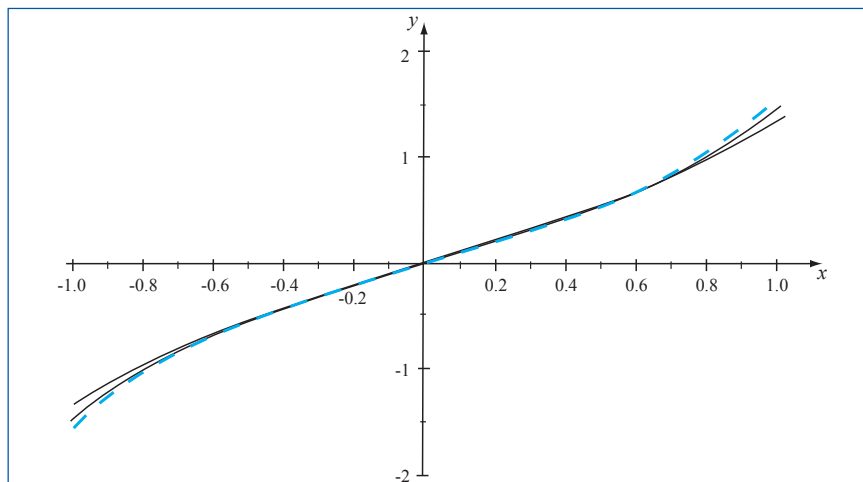
Figura 5.1 - Gráfico da função $\tan x$ (tracejado) e os gráficos dos polinômios de Maclaurin de graus 3 e 5

Exercício 5.2 Encontre uma fórmula para o polinômio de Taylor de grau N da função $\ln x$, em torno de $x_0 > 0$. Compare-a com as somas parciais da série em (4.12) no caso em que $x_0 = 1$. □

É claro que $f(x)$ é analítica em x_0 se, e somente se,

$$f(x) = \lim P_N(x) \tag{5.9}$$

para todo x em algum intervalo aberto contendo x_0. Portanto, os polinômios de Taylor de uma função analítica em x_0 se aproximam desta função quando N aumenta. Esse fato é bastante utilizado para o cálculo aproximado dos valores de uma função $f(x)$ que é analítica em x_0. Numa tal utilização é sempre interessante podermos controlar o tamanho de N que nos interessa, ou seja, para o qual obtemos uma aproximação satisfatória de $f(x)$.

Em outras palavras, do ponto de vista prático, é bom quando podemos controlar a relação entre N e o tamanho do erro que cometemos quando aproximamos uma função $f(x)$ por seu polinômio de Taylor $P_N(x)$. No próximo teorema, mostramos uma das formas de controle desse erro. Porém, uma demonstração desse teorema está fora dos propósitos deste texto. Para uma referência veja o Teorema 3.4.1 em Matos (2001).

Teorema 5.1 *Seja $f(x)$ uma função que possui derivadas de todas as ordens em um intervalo aberto J contendo x_0 e seja N um inteiro positivo. Então, para cada $x \in J$, existe c entre x e x_0 tal que*

$$f(x) = P_N(x) + f^{(N+1)}(c)\frac{(x-x_0)^{N+1}}{(N+1)!}. \tag{5.10}$$

Se denotarmos por $R_N(x)$ o erro na aproximação de $f(x)$ por seu polinômio de Taylor $P_N(x)$, isto é,

$$R_N(x) = |f(x) - P_N(x)|,$$

então o teorema acima nos diz que

$$R_N(x) = \frac{\left|f^{(N+1)}(c)\right|}{(N+1)!}|x-x_0|^{N+1}. \tag{5.11}$$

Portanto, se x estiver em um intervalo (a,b) que contém x_0 e se todas as derivadas até a ordem $N+1$ da função $f(x)$ forem limitadas em módulo, por uma mesma constante K, nesse intervalo, vale a seguinte estimativa para o erro cometido na aproximação de $f(x)$ por seu polinômio de Taylor de ordem N:

$$R_N(x) \leq K\frac{(b-a)^{N+1}}{(N+1)!} \quad \text{para todo } x \in (a,b). \tag{5.12}$$

Exemplo 5.3 Segue de (5.4) que a função $f(x) = \text{sen}(x)$ tem derivadas limitadas, em módulo, pela constante 1, uma vez que

$$\left|(-1)^{k+1}\cos(x)\right| = |\cos x| \leq 1$$

e

$$\left|(-1)^{k}\,\text{sen}(x)\right| = |\text{sen}(x)| \leq 1.$$

Portanto, se (a,b) é um intervalo contendo x_0, então

$$R_N(x) \leq \frac{(b-a)^{N+1}}{(N+1)!} \quad \text{para todo } x \in (a,b).$$

Isso significa que

$$|\text{sen}(x) - P_N(x)| \leq \frac{(b-a)^{N+1}}{(N+1)!} \quad \text{para todo } x \in (a,b)$$

em que

$$P_N(x) = \text{sen}(x_0) + \cos(x_0)(x-x_0) - \frac{\text{sen}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 - \frac{\cos(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{\text{sen}^{(N)}(x_0)}{N!}(x-x_0)^N$$

em que $\text{sen}^{(N)}(x_0)$ representa a N-ésima derivada de $\text{sen}(x)$ avaliada em $x = x_0$.

Assim, se desejarmos uma aproximação de $\text{sen}(x)$ e estivermos dispostos a cometer um erro de, no máximo, $0,001$, então basta que tomemos N suficientemente grande e (a,b), contendo x_0, suficientemente pequeno, tais que

$$\frac{(b-a)^{N+1}}{(N+1)!} \leq 0,001.$$

□

Exemplo 5.4 Para calcular, aproximadamente, o valor $\cos x$ com erro menor do que $0,001$, utilizando um polinômio de Maclaurin de grau $N = 2$, podemos utilizar qualquer valor de x no intervalo (a, b), contendo $x_0 = 0$, tal que

$$\frac{(b-a)^3}{3!} \leq 0,001.$$

Assim, o comprimento $b - a$ desse intervalo deve ser tal que

$$b - a \leq \sqrt[3]{0.001 \times 3!} \approx 0,18.$$

Por exemplo, se $-0,02 < x < 0,16$, então o erro na aproximação

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$$

é menor do que $0,001$. □

Exercício 5.3 Utilize uma calculadora para calcular o valor de $\cos(0,15)$ e depois calcule a diferença entre o resultado encontrado e o valor de $p(0,15)$ em que $p(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!}$. Verifique que essa diferença é menor, em módulo, do que $0,001$. □

Exercício 5.4 Refaça o exercício anterior utilizando $0,4$ no lugar de $0,15$. Qual o valor encontrado para a diferença

$$\cos(0,5) - p(0,5)?$$

Esse valor, em módulo, é menor do que $0,001$? Você poderia explicar por quê? □

O limite (5.9), que caracteriza uma função analítica, é equivalente ao limite $\lim_{N\to\infty} [f(x) - P_N(x)] = 0$, pois

$$\lim_{N\to\infty} (f(x) - P_N(x)) = f(x) - \lim_{N\to\infty} P_N(x).$$

Mas, de acordo com o Teorema 2.2

$$\lim_{N\to\infty} (f(x) - P_N(x)) = 0 \text{ se, e somente se, } \lim_{N\to\infty} |f(x) - P_N(x)| = 0.$$

Assim, dizer que uma função $f(x)$ é analítica em x_0 é equivalente a dizer que

$$\lim_{N\to\infty} R_N(x) = 0$$

ocorre para todo x em um intervalo aberto contendo x_0.

5.3 Analiticidade de e^x, $\ln x$, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$

A estimativa (5.12) também é útil para mostrar que uma função $f(x)$ é analítica. Por exemplo, como veremos a seguir, se em um intervalo aberto contendo x_0 todas as derivadas de $f(x)$ forem limitadas, em módulo, por uma mesma constante K, então $f(x)$ será analítica em x_0. Esse é o caso da função $\operatorname{sen}(x)$ e também da função $\cos(x)$.

Teorema 5.2 *Seja $f(x)$ uma função tal que*

$$\left|f^{(N)}(x)\right| \leq K \text{ para todo } x \in (a,b) \text{ e para todo } N,$$

em que (a,b) contém x_0.

Então, $f(x)$ é analítica em x_0.

Demonstração do teorema: Aplicando a regra do sanduíche às desigualdades

$$0 \leq R_N(x) \leq K\frac{(b-a)^{N+1}}{(N+1)!},$$

encontramos

$$\lim_{N\to\infty} R_N(x) = 0, \text{ para todo } x \in (a,b),$$

uma vez que[1]

$$\lim \frac{(b-a)^{N+1}}{(N+1)!} = 0.$$

□

Exemplo 5.5 Já vimos que a função exponencial $f(x) = e^x$ é analítica em qualquer x_0, mas isso também decorre do teorema acima, uma vez que, se (a,b) é um intervalo contendo x_0, então

$$\left|f^{(N)}(x)\right| = e^x \leq e^b \text{ se } x \in (a,b).$$

Desse fato também decorre a seguinte estimativa para o erro na aproximação de e^x por seu polinômio de Taylor:

$$R_N(x) \leq \frac{e^b(b-a)^{N+1}}{(N+1)!} \text{ para } x \in (a,b).$$

□

Agora podemos enunciar e provar a analiticidade das funções sen x e cos x.

Teorema 5.3 *As funções* sen x *e* cos x *são analíticas.*

Demonstração do teorema: A prova é uma consequência direta do Teorema 5.2 uma vez que todas as derivadas dessas funções são limitadas, em módulo, pela constante 1, em qualquer intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Portanto, essas funções são analíticas em qualquer x_0. □

Em particular, se $x_0 = 0$, temos as representações (5.7) e (5.8) validadas para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

[1] Note que $\frac{C^n}{n!}$ é o termo geral da série convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{n!}$. Portanto, $\lim \frac{C^n}{n!} = 0$.
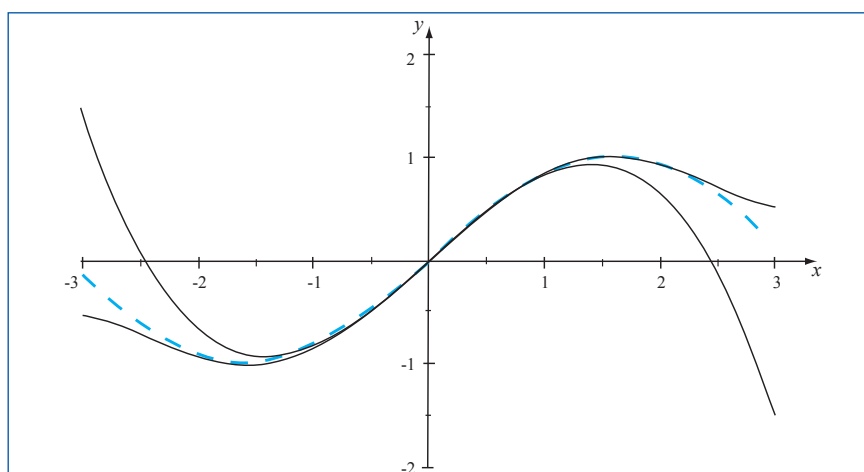
Figura 5.2 - Gráfico da função sen x (tracejado) e de seus polinômios de Maclaurin de graus 3 e 5
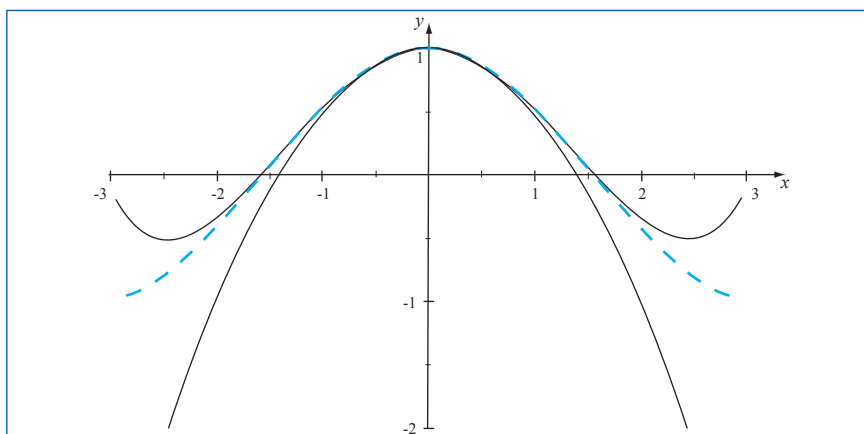
Figura 5.3 - Gráfico da função cos x (tracejado) e de seus polinômios de Maclaurin de graus 2 e 4

Finalizamos este capítulo com um resultado de analiticidade para a função $\ln x$.

Teorema 5.4 *A função $f(x) = \ln x$ é analítica em qualquer $x_0 > 0$ e a sua representação em série de Taylor em torno de x_0 é*

$$\ln x = \ln x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n x_0^n}(x - x_0)^{n-1}, \quad para \quad 0 < |x - x_0| < x_0. \qquad (5.13)$$

A demonstração desse teorema será feita no restante deste capítulo e, como veremos, ela decorre da representação que deduzimos em (4.12) para o caso particular $x_0 = 1$.

Começamos deduzindo a expressão da série de Taylor da função $f(x) = \ln x$ em torno de $x_0 > 0$. Para essa função temos:

$$f'(x) = x^{-1}, \;\; f''(x) = -x^{-2}, \;\; f'''(x) = 2x^{-3}, \;\; f^{(4)}(x) = -3!x^{-4}$$

e, calculando mais algumas derivadas, chegamos à seguinte fórmula

$$f^{(N)}(x) = \frac{(-1)^{N-1}(N-1)!}{x^N} \quad \text{se} \;\; x > 0. \qquad (5.14)$$

Portanto, a série de Taylor de $\ln x$ em torno de x_0 é

$$\ln x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n x_0^n} (x - x_0)^n, \tag{5.15}$$

uma vez que os coeficientes desta série são dados por:

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x_0^n n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n x_0^n}.$$

Exercício 5.5 Mostre que o raio de convergência da série de Taylor (5.15) da função $\ln x$ em torno de $x_0 > 0$ é $R = x_0$. Calcule o intervalo de convergência dessa série. □

O exercício anterior mostra que a série de Taylor (5.15) converge (absolutamente) no intervalo $(0, 2x_0)$. Desejamos verificar que função para a qual essa série converge é exatamente a função $\ln x$.[2] Entretanto, não conseguimos deduzir isso com base no Teorema 5.2, pois as derivadas $f^{(N)}(x)$ são ilimitadas em módulo, isto é, $\lim_{N\to\infty} \left| f^{(N)}(x) \right| = +\infty$ para qualquer $x > 0$. De fato,

$$\lim_{N\to\infty} \left| f^{(N)}(x) \right| = \lim_{N\to\infty} \frac{(N-1)!}{x^N} = \frac{1}{x} \lim_{N\to\infty} \frac{(N-1)!}{x^{N-1}} = +\infty,$$

uma vez que $\lim_{N\to\infty} \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} = 0$ (esta sequência é o termo geral de uma série convergente).

Mesmo a utilização da expressão (5.11) para estimar, diretamente, o resto $R_N(x)$ da série, torna-se uma tarefa difícil. É que substituindo (5.14) em (5.11) obtemos

$$R_N(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{|x - x_0|}{c} \right)^{N+1}$$

para c entre x e x_0, sendo $x \in (0, 2x_0)$. Daí, teríamos que fazer um estudo mais detalhado das possibilidades envolvendo c, x e x_0 a fim de concluir que $\lim_{N\to\infty} R_N(x) = 0$ a partir da expressão anterior para $R_N(x)$.

Felizmente, tomando outro caminho bem mais simples conseguimos mostrar que $\ln x$ é analítica em qualquer $x_0 > 0$. A estratégia vem da seguinte representação de $\ln x$ que deduzimos em (4.12):

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n, \text{ para} 0 < x < 2.$$

É fácil verificarmos que a série à direita da igualdade acima é a série de Taylor de $\ln x$ em torno de $x_0 = 1$, pois ela coincide com a expressão (5.15) quando x_0 é substituído por 1 (lembre que $\ln 1 = 0$).

Agora, fixemos $x_0 > 0$. Se $x \in (0, 2x_0)$, então $0 < \frac{x}{x_0} < 2$. Portanto, a representação anterior é válida se trocamos x por $\frac{x}{x_0}$. Fazendo isso, obtemos

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{x_0} - 1\right)^n, \text{para} 0 < \frac{x}{x_0} < 2.$$

[2] A série de Taylor de uma função $f(x)$ pode ser convergente, mas seu limite pode não ser a função $f(x)$. Por exemplo, é possível mostrar que a função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

possui derivadas de todas as ordens e que todas elas se anulam em $x_0 = 0$. Assim, sua série de Maclaurin é a série nula que, portanto, converge para a função identicamente nula.

Mas, como:

- $\ln\left(\dfrac{x}{x_0}\right) = \ln x - \ln x_0$ (esta é uma propriedade dos logarítmos, lembra-se?),

- $\left(\dfrac{x}{x_0} - 1\right)^n = \left(\dfrac{x - x_0}{x_0}\right)^n = \dfrac{1}{x_0^n}(x - x_0)^n$ e

- $0 < \dfrac{x}{x_0} < 2$ é equivalente a $0 < |x - x_0| < x_0$,

concluímos que

$$\ln x = \ln x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n x_0^n}(x - x_0)^n, \quad \text{para} \quad 0 < |x - x_0| < x_0.$$

Por fim, como a expressão à direita da igualdade acima é exatamente a série de Taylor de $\ln x$ em torno de x_0, concluímos a demonstração do Teorema 5.4, isto é, acabamos de verificar que $\ln x$ é analítica em qualquer $x_0 > 0$ e que (5.13) é a sua representação em série de Taylor em torno de $x_0 > 0$.

Exercícios

1. Seja $f(x) = x^2 \ln(1+x)$.
   (a) Obtenha a série de Maclaurin para $f(x)$ e indique o intervalo em que essa série é convergente.
   (b) Determine $f^{(10)}(0)$, a décima derivada de f em $x = 0$.

2. Seja $f(x) = x^3 \ln(1+x^2)$.
   (a) Obtenha a série de Maclaurin para $f(x)$ e indique o intervalo em que essa série é convergente.
   (b) Determine $f^{(15)}(0)$, a décima quinta derivada de f em $x = 0$.

3. Encontre a série de Taylor de $f(x) = x \ln x$ em torno do ponto $x_0 = 4$.

4. Utilize uma expansão em série de Taylor de $f(x) = \ln x$ para mostrar que:
   (a) $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.
   (b) $\ln 4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. Calcule a soma das séries:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{4}{5}\right)^n$.
   (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n}$.

6. Encontre uma representação em série de potências para a função $F(x) = \int_1^x \ln(t)dt$ válida para $0 < x < 2$.

7. Encontre a série de Taylor da função $f(x)$ em torno do ponto x_0 para:
   (a) $f(x) = \text{sen}(x)$ e $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
   (b) $f(x) = \cos(x)$ e $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
   (c) $f(x) = \text{sen}(2x)$ e $x_0 = \frac{\pi}{8}$. (Sugestão: note que $(2x - \frac{\pi}{4})^n = 2^n(x - \frac{\pi}{8})$.

8. Calcule os três primeiros termos da série de Maclaurin da função $f(x)$:
   (a) $f(x) = \tan x$.
   (b) $f(x) = x + \cos(\pi e^x)$.
   (c) $f(x) = e^{\text{sen}\, x}$.

Referências

MATOS, M. P. *Séries e equações diferenciais*. São Paulo: Prentice Hall, 2001.

STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. v. 1 e 2.

Sobre o autor

Grey Ercole é graduado em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais(1988), mestre em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (1991) e doutor em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (1996). Professor Associado III do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, atua na área de Equações Diferenciais, especialmente em problemas de existência, unicidade, multiplicidade e comportamento assintótico de soluções.